高等学校教学用书

天体力学和天文动力学

郑学塘　倪彩霞　编著

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

天体力学和天文动力学

郑学塘　倪彩霞　编著



北京师范大学出版社

责任编辑 李桂福

高等学校教学用书
天体力学和天文动力学
郑学塘 倪彩霞 编著
*
北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：14.875 字数：365千
1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷
印数：1—1 000

ISBN 7-303-00598-6/P·4
定 价：3.55 元

前　言

本书是根据编著者在北京师范大学为天文系本科生、研究生和进修教师讲授的《天体力学》和《人造天体轨道理论》讲义改编而成的。它系统地介绍了天体力学和天文动力学中的基本理论和方法；同时还利用这些方法研究了各种自然天体和人造天体的运动。

全书共分九章。第一章介绍各种天体的引力场位函数的形式。第二章讲述天体力学和天文动力学中最基本的问题——二体问题。第三章介绍利用现代观测手段所得到的各种观测资料，计算天体的初始轨道以及作轨道改进的方法。第四章讲述天体力学中最一般的问题——N体问题。第五章讲述天体摄动运动方程的建立以及分析解法概要，作为应用和发展还介绍了行星和月球的运动以及天体运动中的相对论效应。第六章介绍摄动运动方程的各种数值解法。第七、八、九章属于天文动力学中的基本问题。第七章介绍人造地球卫星在地球引力、大气阻力、太阳光压和日、月引力等作用下的运动轨道以及它的位置预报。第八章讲述天体力学中常用的分析解法——正则变换理论和中间轨道理论，并利用这些理论来讨论人造卫星的运动。第九章介绍月球火箭和行星际火箭在各种摄动力的作用下于地月空间和行星际空间中的运动轨道。在编写过程中，我们注意到尽可能地反映天体力学和天文动力学近年来国内、外最新的研究成果。

本书第一、五(第7、8、9和10节)、七、八、九章由郑学塘副教授编写，其余各章节均由倪彩霞副教授编写。北京天文馆名誉馆长陈晓中教授仔细审阅了全部书稿，并给予我们热情的鼓励和支持，北京师范大学出版社编辑和有关同志为本书的出版做了许多工作，笔者在此表示真诚的感谢。

编者

1987年8月

目　录

第一章 天体引力场位函数

天体引力场位函数是反映天体引力场情况的量. 利用它可以得到天体在这个引力场中的运动情况. 因此天体引力场位函数的形式是天体力学和天文动力学中一个重要而又基本的问题, 本章首先给出位函数的定义并介绍天体引力场位函数的几种基本形式; 然后具体讨论地球引力场, 盘和环状天体引力场位函数的形式.

§1 位函数的定义

我们任选一个惯性坐标系 xyz, 如图 1-1 所示. 质量为 m_i 的质点 P_i 对空间中任一质点 P 具有引力. 根据牛顿第二运动定律和万有引力定律, 可以得到 P 在 P_i 的引力作用下的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -Gm_i\frac{\boldsymbol{\Delta}_i}{\Delta_i^3}. \tag{1.1}$$

其中 G 是万有引力常数, $\boldsymbol{\Delta}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i$ 是 P 相对 P_i 的位置矢.

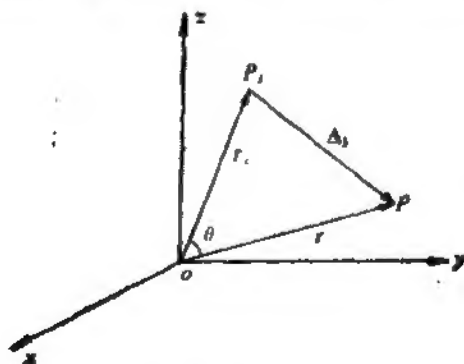


图 1-1

如果有 n 个质点 P_1、P_2、……、P_n，它们的质量分别为 m_1、m_2、……m_n，则 P 点在这 n 个质点的引力作用下的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\sum_{i=1}^{n} Gm_i \frac{\boldsymbol{\Delta}_i}{\Delta_i^3}. \tag{1.2}$$

为了方便起见，我们可以引入一个记号

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{Gm_i}{\Delta_i}. \tag{1.3}$$

采用哈密顿 (Hamilton) 算子，数量 $\frac{1}{\Delta_i}$ 的梯度是 $\nabla\left(\frac{1}{\Delta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\Delta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}\left(\frac{1}{\Delta_i}\right) = -\frac{\boldsymbol{\Delta}_i}{\Delta_i^3}$. 利用 (1.3) 式，可将 (1.2) 式改写为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \nabla V. \tag{1.4}$$

由 (1.3) 式所定义的 V 称为这 n 个质点对 P 点的位函数，从 (1.4) 式可以看出位函数对 P 点坐标的梯度就是它的引力加速度.

对于具有一定形状和大小的天体，我们可以把它划分为许多小体元，每个体元都能视为一个质点。设任一小体元的质量是 dM，它与 P 点的距离为 ρ，则由 (1.3) 式可得该天体对 P 点的位函数应当是：

$$V = \iiint \frac{G dM}{\rho}. \tag{1.5}$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别为 P 点与体元 dM 相对于坐标原点(通常取天体的质心为坐标原点)的位置矢，体积分是对整个天体进行的。

由 (1.3) 式可以看出某质点系对 P 点的位函数只与各个质点的质量和它们到 P 点的距离有关而与坐标系的选择无关. 同样由 (1.5) 式可以看出一个天体对 P 点的位函数只与这个天体的质量和它到 P 点的距离以及天体的形状、内部密度分布有关，而与坐标系的选择无关. 如果我们知道了某个天体引力场的位函数，则由

(1.4) 式可以得出它所产生的引力加速度. 因此位函数是一个反映引力场情况的量.

根据理论力学知识有:

(1) 均匀球壳对其外一点的位函数与把球壳质量集中在球心的质点对该点的位函数一样，因此均匀球壳对其外产生的引力场可以认为把球壳质量集中在球心的质点所产生的引力场.

(2) 均匀正球体对其外一点的位函数与把球体质量集中在球心的质点对该点的位函数一样，因此均匀正球体对其外产生的引力场可以认为把球体质量集中在球心的质点所产生的引力场.

(3) 等密度面为同心球层的正球体对其外一点的位函数与把球体质量集中在球心的质点对该点的位函数一样. 因此这种正球体对其外产生的引力场可以认为把球体质量集中在球心的质点所产生的引力场.

(4) 均匀球壳对其内任一点的位函数都是常数，因此它对其内任一点所产生的引力加速度为零.

§2 天体引力场位函数

上节已经得到了天体对其外一点的位函数，我们不难证明由 (1.5) 式所定义的天体引力场位函数是满足拉普拉斯 (Laplace) 方程的.

事实上根据 (1.5) 式有:

$$dV = \frac{GdM}{\rho}. \tag{1.6}$$

$\frac{1}{\rho}$ 的梯度是 $\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}$，再对它求散度结果是 $\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right) = \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} + \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho^3}\right) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^3} = 0$，故将 (1.6) 式二边求梯度后再求散度的结果为

$$\nabla^2 dV = \nabla\cdot\nabla dV = GdM\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \tag{1.7}$$

(1.7) 式对天体内任何体元都成立。

在 (1.5) 式中，积分是对整个天体进行的，因此积分仅与体元的位置 $\boldsymbol{r}'$ 有关而与 P 点的位置 $\boldsymbol{r}$ 无关。但是算符 ∇^2 是对 $\boldsymbol{r}$ 进行的，它与 $\boldsymbol{r}'$ 无关。根据积分号下求微商的法则可以对易这二种运算秩序，结果可得：

$$\nabla^2 V = \nabla^2 \iiint dV = \iiint \nabla^2 dV = 0. \tag{1.8}$$

上式说明天体对其外一点的位函数 V 是满足拉普拉斯方程的，它是一个调和函数。另外，也反映了天体的引力场是一种保守场，它既无沟也无源。很自然，在这种引力场中运动的质点应当具有能量积分和动量矩积分。

由于天体引力场位函数是满足拉普拉斯方程的，因此我们可以通过求解拉普拉斯方程得到它的具体形式。

设有曲面坐标 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)，它与直角坐标 (x, y, z) 的关系为

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

我们可得在这空间中的线元的平方是：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} d\xi_i d\xi_j. \tag{1.9}$$

其中

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi_i}\frac{\partial x}{\partial \xi_j} + \frac{\partial y}{\partial \xi_i}\frac{\partial y}{\partial \xi_j} + \frac{\partial z}{\partial \xi_i}\frac{\partial z}{\partial \xi_j}. \tag{1.10}$$

它被称为该空间的度规张量。如果该曲面坐标系是正交的话，则有

$$g_{ij} = 0. \quad (i \neq j)$$

根据矢量分析，可以得到在正交曲面坐标系中拉普拉斯方程的形式是：

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{ii}} \frac{\partial V}{\partial \xi_i}\right) = 0. \tag{1.11}$$

其中 $g = \|g_{ij}\| = g_{11}g_{22}g_{33}$。

在天文上，我们常用的正交曲面坐标系有三种：球面坐标系、柱面坐标系和椭球坐标系。下面分别求出在这三种曲面坐标系中，天体引力场位函数的具体形式。

(1) 球面坐标系 (r, φ, λ)。

这时取 $\xi_1 = r$，$\xi_2 = \varphi$，$\xi_3 = \lambda$，它们与直角坐标关系为

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\lambda \\ y &= r\cos\varphi\sin\lambda \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}。 \tag{1.12}$$

这时的度规张量为

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos^2\varphi \end{pmatrix}，$$

相应的 $g = r^4\cos^2\varphi$。由 (1.11) 式可得球面坐标系中的拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2} = 0。 \tag{1.13}$$

(1.13) 式是有三个自变量 (r, φ, λ) 的二阶偏微分方程，一般采用分离变量法求解．为此令

$$V(r, \varphi, \lambda) = R(r)\Phi(\varphi)\Lambda(\lambda)。 \tag{1.14}$$

将它代入 (1.13) 式后，可将偏微分方程化为三个二阶常微分方程：

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0。 \tag{1.15}$$

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dP}{d\mu} + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-\mu^2}\right]P = 0。 \tag{1.16}$$

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + k^2\Lambda = 0。 \tag{1.17}$$

其中 n，k 都是正整数，$\mu = \sin\varphi$，$P(\mu) = \Phi(\varphi)$。

(1.15) 式是欧拉 (Euler) 方程，其通解为

$$R(r)=\begin{Bmatrix} r^n \\ r^{-(n+1)} \end{Bmatrix}. \tag{1.18}$$

(1.16)式是缔合(或连带)勒让德(Associate Legendre)方程，其解为

$$\Phi(\varphi)=P_n^k(\sin\varphi). \tag{1.19}$$

其中 $P_n^k(\sin\varphi)$ 是以 $\sin\varphi$ 为引数的 n 阶 k 级缔合勒让德函数.

(1.17) 式是简谐振动方程，通解为

$$\Lambda(\lambda)=\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix}. \tag{1.20}$$

将 (1.18)—(1.20) 式代入(1.14)式后，可得在球面坐标系中，天体引力场位函数的形式是:

$$V(r,\varphi,\lambda)=P_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r^n \\ r^{-(n+1)} \end{Bmatrix}. \tag{1.21}$$

式中 $Y(\varphi,\lambda)=P_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix}$ 称为球面函数或简称球函数，$Y(\varphi,\lambda)\begin{Bmatrix} r^n \\ r^{-(n+1)} \end{Bmatrix}$ 称为球体函数. 通常天体引力场位函数应满足边界条件: 当 $r\to\infty$ 时，$V\to 0$，故(1.21)式变为

$$V(r,\varphi,\lambda)=r^{-(n+1)}P_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix}. \tag{1.22}$$

(2) 柱面坐标系 (r,λ,z).

这时取 $\xi_1=r$，$\xi_2=\lambda$，$\xi_3=z$，它们与直角坐标关系为

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\lambda \\ y&=r\sin\lambda \\ z&=z \end{aligned}\right\}. \tag{1.23}$$

相应的度规张量及行列式的值分别是:

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g=r^2.$$

拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \quad (1.24)$$

同样令

$$V(r,\lambda,z)=R(r)\Lambda(\lambda)Z(z). \quad (1.25)$$

可将(1.24)式化为三个二阶常微分方程:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(\omega^2-\frac{k^2}{r^2}\right)R=0\\&\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}\lambda^2}+k^2\Lambda=0\\&\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}-\omega^2Z=0\end{aligned}\right\}. \quad (1.26)$$

或者

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\left(\omega^2+\frac{k^2}{r^2}R\right)=0\\&\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}\lambda^2}+k^2\Lambda=0\\&\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+\omega^2Z=0\end{aligned}\right\}. \quad (1.27)$$

其中 k 和 ω 都是正整数.

在(1.26)式中令 $\rho=\omega r$, 在(1.27)式中令 $\rho=i\omega r$, 则都可将它们的第一式化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(1-\frac{k^2}{\rho^2}\right)R=0. \quad (1.28)$$

(1.28)式是贝塞尔(Bessel)方程,它的解为

$$R(\rho)=J_k(\rho). \quad (1.29)$$

式中 $J_k(\rho)$ 是以 ρ 为引数的 k 阶第一类贝塞尔函数或简称为贝塞尔函数. 若 $\rho=i\omega r$ 时 $J_k(\rho)=J_k(i\omega r)=I_k(\omega r)$, 这里的 $I_k(\omega r)$ 是以 ωr 为引数的 k 阶第一类虚宗量贝塞尔函数. 于是可得在柱面坐标系中,天体引力场位函数的形式为

$$V(r,\lambda,z)=J_k(\omega r)\begin{Bmatrix}\cos k\lambda\\ \sin k\lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{\omega z}\\ e^{-\omega z}\end{Bmatrix}. \tag{1.30}$$

或者

$$V(r,\lambda,z)=I_k(\omega r)\begin{Bmatrix}\cos k\lambda\\ \sin k\lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos \omega z\\ \sin \omega z\end{Bmatrix}. \tag{1.31}$$

如果考虑到它应满足边界条件：当 $z\to\infty$ 时，$V\to 0$，这时天体引力场位函数应为

$$V(r,\lambda,z)=e^{-\omega z}J_k(\omega r)\begin{Bmatrix}\cos k\lambda\\ \sin k\lambda\end{Bmatrix} \tag{1.32}$$

(3) 椭球坐标系 (λ,μ,ν)。

这时取 $\xi_1=\lambda$，$\xi_2=\mu$，$\xi_3=\nu$，它们与直角坐标关系为

$$\left.\begin{aligned}x^2&=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\\ y^2&=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}\\ z^2&=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\end{aligned}\right\}. \tag{1.33}$$

式中 a、b、c 是椭球的三个半轴，有 $a>b>c$；λ、μ、ν 的变化范围为 $\lambda>-c^2>\mu>-b^2>\nu>-a^2$。

相应有

$$g_{ij}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\dfrac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{A(\lambda)} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{A(\mu)} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}{A(\nu)}\end{pmatrix}$$

和

$$g=-\frac{(\lambda-\mu)^2(\lambda-\nu)^2(\mu-\nu)^2}{64A(\lambda)A(\mu)A(\nu)}.$$

其中 $A(\lambda)=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$，$A(\mu)$ 和 $A(\nu)$ 是将

其中的自变量 λ 分别改为 μ 和 ν。

这时的拉普拉斯方程为

$$
\begin{aligned}
&(\mu-\nu)\sqrt{A(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{A(\lambda)}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\\
&\quad+(\lambda-\nu)\sqrt{-A(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{-A(\mu)}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)\\
&\quad+(\lambda-\mu)\sqrt{A(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{A(\nu)}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)=0, \quad (1.34)
\end{aligned}
$$

同样令

$$V(\lambda,\mu,\nu)=\Lambda(\lambda)M(\mu)N(\nu). \quad (1.35)$$

可将 (1.34) 式化为三个二阶常微分方程

$$
\left.\begin{aligned}
&4\sqrt{A(\lambda)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sqrt{A(\lambda)}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right)-[n(n+1)\lambda+c]\Lambda=0\\
&4\sqrt{-A(\mu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\sqrt{-A(\mu)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu}\right)+[n(n+1)\mu+c]M=0\\
&4\sqrt{A(\nu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\sqrt{A(\nu)}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\nu}\right)-[n(n+1)\nu+c]N=0
\end{aligned}\right\}. \quad (1.36)
$$

其中 n, c 为正整数. (1.36) 式是三个形式相似的方程，它们称为拉梅 (Lamé) 方程，其解为

$$\Lambda(\lambda)=E_n^m(s). \quad (1.37)$$

式中 $E_n^m(s)$ 是以 s 为引数的第一类拉梅函数. 其中 $m=-n$, $-n+1,\cdots,0,\cdots,n-1,n$; $s=\dfrac{a^2+\lambda}{a^2-b^2}$.

为了方便起见将 $E_n^m(s)$ 简记为 $E_n^m(\lambda)$，则类似有 $M(\mu)=E_n^m(\mu)$, $N(\nu)=E_n^m(\nu)$，只是将 s 中的 λ 相应改为 μ 和 ν. 于是可得在椭球坐标系中，天体引力场位函数的形式为

$$V(\lambda,\mu,\nu)=E_n^m(\lambda)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu). \quad (1.38)$$

在自然界中，绝大多数天体的形状都接近于正球体，故最常用的位函数形式是 (1.22) 式。但是天体都有自转，有些自转角速度还比较大，它们的形状更接近于椭球体，因此也有采用位函数的形

式是(1.38)式的。例如苏联的杜波申（Дубошин）曾利用它讨论人造卫星在地球引力场中的运动. 自然界中也还有些天体或者系统呈环状或者盘状，可能采用位函数的形式为(1.32)式更好些。对于不同的研究对象应当采用不同的位函数形式。

§3 地球引力场位函数

在下章§5中，我们将会证明下面一个定理：设 $f(y)$ 和 $\phi(y)$ 在某区域内和边界上是解析的，对于域内任一点都有关系式 $y=x+\alpha\phi(y)$ 成立，其中 α 是参变量，ϕ 是 y 的已知函数，则能将 y 的任意函数 $f(y)$ 展开为 α 的幂级数，其系数仅含有 x。具体形式为

$$F(y)=F(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\phi^n(x)\frac{dF(x)}{dx}\right]. \tag{1.39}$$

这个定理称为拉格朗日（Lagrange）定理，(1.39)式称为拉格朗日级数。

下面利用这个定理得出距离倒数的展式。

设 P 点相对体元的位置矢 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，于是 $\rho^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta$，其中 θ 为 P 点和体元相对原点的张角。欲令 $\frac{r'}{r}=\alpha<1$，$\cos\theta=\mu$，则距离 ρ 的倒数为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}(1-2\mu\alpha+\alpha^2)^{-1/2}. \tag{1.40}$$

在(1.39)式中取 $\phi(y)=\frac{1}{2}(y^2-1)$，则有 $y=x+\frac{\alpha}{2}(y^2-1)$，由此可以解出 $y=\frac{1}{\alpha}(1-\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2})$，得到 $\frac{dy}{dx}=(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-1/2}$。令 $f(y)=y$，则 $f(x)=x$，$\phi(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$，利用(1.39)式可得：

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} \left[\frac{1}{2}(x^2 - 1)\right]^n. \tag{1.41}$$

将 (1.41) 式两边对 x 求导可得:

$$(1 - 2x\alpha + \alpha^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [(x^2 - 1)^n]. \tag{1.42}$$

上式 α^n 的系数就是 n 阶勒让德多项式的微分形式罗巨格 (Rodrigues) 公式

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\mu^n} [(\mu^2 - 1)^n]. \tag{1.43}$$

将 (1.42) 和 (1.43) 式代人 (1.40) 式后可得距离倒数的展式是:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu)\alpha^n. \tag{1.44}$$

其中 $\alpha = \frac{r'}{r}$, $\mu = \cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$.

利用距离倒数的展式可得地球引力场位函数。

将 (1.44) 式代人 (1.5) 式时有:

$$V = \iiint \frac{G}{r}\,\mathrm{d}M + \iiint \frac{G\mu r'}{r^2}\,\mathrm{d}M$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Gr'^n P_n(\mu)}{r^{n+1}}\,\mathrm{d}M. \tag{1.45}$$

式中体积分是对整个地球进行的,它只与r' 和 μ 有关而与 r 无关.

在 (1.45) 式中,右端第一项积分结果是 $\frac{GM}{r}$, 它是将质量集中于质心的质点对 P 点的位函数,第二项是

$$\frac{G}{r^3}\left(x\iiint x'\mathrm{d}M + y\iiint y'\mathrm{d}M + z\iiint z'\mathrm{d}M\right).$$

我们知道质心的位置是:

$$\xi = \frac{\iiint x'\mathrm{d}M}{M}, \quad \eta = \frac{\iiint y'\mathrm{d}M}{M}, \quad \zeta = \frac{\iiint z'\mathrm{d}M}{M}.$$

如果我们取天体的质心为坐标原点即令 $\xi=\eta=\zeta=0$，则第二项积分结果是零。于是(1.45)式变为

$$V=\frac{GM}{r}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{G}{r^{n+1}}\iiint r'^{n}P_{n}(\mu)\mathrm{d}M. \tag{1.46}$$

对于地球引力场，我们采用球面坐标系，其位函数形式应是(1.22)式。由于 $\mu=\cos\theta$，它与 r 的方向有关，即在球面坐标系中与角度 φ、λ 有关，故这时 $P_n(\mu)$ 的形式应当是$P_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix}\cos k\lambda\\ \sin k\lambda\end{Bmatrix}$或者写为

$$P_n(\mu)=\sum_{k=0}^{n}(a_{nk}\cos k\lambda+b_{nk}\sin k\lambda)P_n^k(\sin\varphi), \tag{1.47}$$

其中系数 a_{nk}，b_{nk} 仅与 r 的方向有关，即它们是 x'、y' 和 z' 的函数。

将(1.47)式代入(1.46)式后可得球面坐标系中地球引力场位函数的展式是：

$$V=\frac{GM}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n}P_n^k(\sin\varphi)C_{nk}\cos k\lambda\right.$$
$$\left.+S_{nk}\sin k\lambda\right]. \tag{1.48}$$

其中 a_e 是地球赤道平均半径，系数

$$\left.\begin{aligned}C_{nk}&=\frac{1}{M}\iiint a_{nk}(x',y',z')\left(\frac{r'}{a_e}\right)^{n}\mathrm{d}M\\ S_{nk}&=\frac{1}{M}\iiint b_{nk}(x',y',z')\left(\frac{r'}{a_e}\right)^{n}\mathrm{d}M\end{aligned}\right\}. \tag{1.49}$$

在(1.48)式中，对于 $k=0$ 的项 $P_n^k(\sin\varphi)=P_n(\sin\varphi)$，并令 $C_{n0}=-J_n$，则(1.48)式变为

$$V=\frac{GM}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n}J_nP_n(\sin\varphi)\right.$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n}P_n^k(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\lambda+S_{nk}\sin k\lambda)\right]. \tag{1.50}$$

式中 J_n 称为带谐系数，C_{nk} 和 S_{nk} 称为田谐系数，对于 $n=k$ 的又称为扇谐系数。包含这些系数的项分别称为带谐项，田谐项和扇谐项，带谐项与经度无关。这些系数与地球的形状，内部密度分布有关，它们反映着地球引力场的性质。

由于引力场位函数与坐标系的选择无关，如果我们选择赤道面为基本平面，格林尼治天文台（地理经度起算点）为 x 轴，这时 r、φ 和 λ 表示 P 点的地心距离、纬度和地理经度。

在 (1.50) 式的推算过程中，对它的形状和密度分布未作任何假定，因此该式也适用于其它行星和卫星之类的天体。

上面得到的 (1.50)式是地球引力场位函数的一般形式。但在讨论一些具体问题时，为了方便起见我们常常采用下面二种简化模型。

(1) 地球引力场位函数是以自转轴为旋转对称的。

这时 V 与 λ 无关，故 (1.50) 式变为

$$V=\frac{GM}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi)\right]. \qquad (1.51)$$

对于 n 为偶数的 J_n 称为偶阶带谐系数，对于 n 为奇数的 J_n 称为奇阶带谐系数。利用勒让德多项式具有性质：$P_n(-\mu)=(-1)^n P_n(\mu)$，可以得到在 n 为偶数时欲将 ϕ 变为 $-\phi$ 则 V 保持不变。因此偶阶带谐系数是反映地球引力场南北对称性。相反奇阶带谐系数是反映地球引力场南北不对称性的程度。

(2) 地球是一个三轴椭球体。

假定地球引力场位函数 V 相对于纬度 ϕ 是对称的。利用缔合勒让德函数具有性质：$P_n^k(-\mu)=(-1)^{n-k}P_n^k(\mu)$，我们可得对于 n 为奇数的 $J_n=0$，对于 $n-k$ 为奇数的 $C_{nk}=S_{nk}=0$。这样有 $J_3=J_5=C_{21}=S_{21}=0$。在 (1.50) 式中，我们略去 J_6 和 C_{33}、S_{33} 及其以后项所得到的主要项是

$$V=\frac{GM}{r}\left[1-\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 J_2P_2(\sin\varphi)-\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 J_4P_4(\sin\varphi)\right.$$

$$+\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 P_2^2(\sin\varphi)(C_{22}\cos 2\lambda + S_{22}\sin 2\lambda)\Big]. \tag{1.52}$$

欲令 $C_{22}=A\cos 2\lambda_e$，$S_{22}=A\sin 2\lambda_e$，即有

$$A=\sqrt{C_{22}^2+S_{22}^2}, \quad \lambda_e=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{S_{22}}{C_{22}}. \tag{1.53}$$

这时 (1.52) 式可以写为

$$V=\frac{GM}{r}\Big[1-\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 J_2P_2(\sin\varphi)-\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 J_4P_4(\sin\varphi)$$

$$+\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 AP_2^2(\sin\varphi)\cos 2\lambda_p\Big].$$

或者

$$V=\frac{GM}{r}\Big[1-\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 J_2\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)$$

$$-\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 J_4\left(\frac{35}{8}\sin^4\varphi-\frac{15}{4}\sin^2\varphi+\frac{3}{8}\right)$$

$$+3\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 A\cos^2\varphi\cos 2\lambda_p\Big]. \tag{1.54}$$

其中 $\lambda_p=\lambda-\lambda_e$。

由(1.54)式可以看出将 λ_p 变为 $-\lambda_p$ 和 $\pi-\lambda_p$ 时，V 值保持不变。因此 λ_e 和 $\frac{\pi}{2}+\lambda_e$ 是二个对称面的经度。如果地球是一个三轴椭球体的话，则它们分别是地球赤道面上的长轴和短轴的地理经度。λ_p 是从长轴起算的 P 点的经度。如图 1-2 所示。

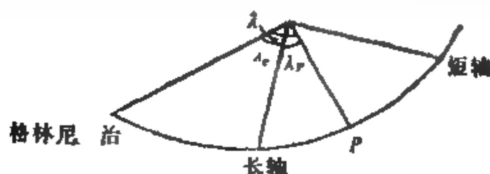


图 1-2

(1.54) 式是以赤道面，另外二个对称面这三个相互垂直的平

面为对称的．更进一步，如果地球是一个三轴椭球体，则这三个平面与地球相截呈三个椭圆面，相应的地球表面方程可写为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1.55}$$

其中 a、b、c 分别是地球赤道半长径、半短径和极半径，有 $c<b<a$．它们与地球的椭率 α 和赤道的椭率 β 之间关系为

$$\alpha=\frac{a-c}{a}, \quad \beta=\frac{a-b}{a}. \tag{1.56}$$

α 和 β 反映地球及其赤道的扁圆程度，它们应当与系数 J_2、J_4 和 C_{22}、S_{22} 有关．

在以地心为原点，赤道面为基本平面，长轴为 x 轴的坐标系中，地球表面上任意一点的位置是：

$$x=r\cos\varphi\cos\lambda_p, \quad y=r\cos\varphi\sin\lambda_p, \quad z=r\sin\varphi.$$

它们应当满足方程 (1.55)，有：

$$\frac{r^2\cos^2\varphi\cos^2\lambda_p}{a^2}+\frac{r^2\cos^2\varphi\sin^2\lambda_p}{b^2}+\frac{r^2\sin^2\varphi}{c^2}=1.$$

或者是

$$r^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}r^2\cos^2\varphi\sin^2\lambda_p+\frac{a^2-c^2}{c^2}r^2\sin^2\varphi=a^2. \tag{1.57}$$

从大地测量知道 $\alpha\sim3\times10^{-3}$，$\beta\sim3\times10^{-5}$，故有 $\alpha^3\sim\beta^2\sim10^{-8}-10^{-9}$．由 (1.56) 式可得 $\frac{a^2-b^2}{b^2}=2\beta+O(\beta^2)$，$\frac{a^2-c^2}{c^2}=2\alpha+3\alpha^2+O(\alpha^3)$．将它们代入(1.57)式后可得：

$$r^2(1+2\alpha\sin^2\varphi+3\alpha^2\sin^2\varphi+2\beta\cos^2\varphi\sin^2\lambda_p) + O(\alpha^3,\beta^2)=a^2.$$

或者是

$$\frac{r}{a}=1-\alpha\left(1+\frac{3}{2}\alpha\right)\sin^2\varphi+\frac{3}{2}\alpha^2\sin^4\varphi -\beta\cos^2\varphi\sin^2\lambda_p+O(\alpha^3,\beta^2). \tag{1.58}$$

将(1.58)式代入(1.54)式后可得地球表面任一点的位函数为

$$
\begin{aligned}
V = \frac{GM}{a}\Bigg[&1 + \alpha\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right)\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\sin^4\varphi \\
&+ \beta\cos^2\varphi\sin^2\lambda_p - J_2\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right)(1 + 3\alpha\sin^2\varphi) \\
&- J_4\left(\frac{35}{8}\sin^4\varphi - \frac{15}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}\right) \\
&+ 3A\cos^2\varphi\cos 2\lambda_p\Bigg].
\end{aligned}
\tag{1.59}
$$

通常认为地球表面是一个大地水准面，如果把地球看作为一个密度均匀的流体，则由流体力学可得它处于自转平衡时，其表面的方程是

$$V + \frac{\omega^2}{2}r^2\cos^2\varphi = \text{const}. \tag{1.60}$$

式中ω是地球自转角速度。

由于地球表面上任一点都应处于自转平衡状态，这意味着对于任意的ϕ和λ_p，(1.60)式都要成立．我们将(1.58)和(1.59)式代入(1.60)式，并且比较$\sin^2\varphi$ $\sin^4\varphi$（或$\cos 2\varphi$，$\cos 4\varphi$）和$\cos^2\varphi$ $\cos 2\lambda_p$前系数可得：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\alpha\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right) - \frac{3}{2}J_2(1 - \alpha) + \frac{15}{4}J_4 \\
&\qquad - \frac{l}{2}(1 + 2\alpha) - \frac{\beta}{2} = 0 \\
&-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{9}{2}J_2\alpha - \frac{35}{8}J_4 + l\alpha = 0 \\
&-\frac{\beta}{2} + 3A = 0
\end{aligned}
\right\}. \tag{1.61}
$$

其中 $l = \dfrac{\omega^2 a^3}{MG} = 3.4614 \times 10^{-3} \sim \alpha$。由此解出

$$
\left.\begin{aligned}
J_2 &= \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{3}l + \frac{3}{7}l\alpha - \frac{1}{3}\beta + O(\alpha^3, \beta^2) \\
J_4 &= -\frac{8}{35}\left(\frac{9}{2}J_2\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 - l\alpha\right) \\
&= -\frac{4}{5}\alpha^2 + \frac{4}{7}l\alpha + O(\alpha^3, \beta^2) \\
A &= \frac{\beta}{6} + O(\alpha^3, \beta^2)
\end{aligned}\right\}. \tag{1.62}
$$

相反可得

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{3}{2}J_2 + \frac{9}{8}J_2^2 - \frac{3}{14}lJ_2 + \frac{1}{2}l - \frac{11}{56}l^2 \\
&\quad + 3A + O(J_2^3, A^2) \\
\beta &= 6A + O(J_2^3, A^2)
\end{aligned}\right\}. \tag{1.63}
$$

我们利用测定的 J_2，C_{22} 和 S_{22} 可由(1.53)和(1.63)式算出地球椭率 α，赤道椭率 β 和地球赤道长轴的地理经度 λ_e。利用人造卫星所测得的 $\alpha = \dfrac{1}{298.258}$，$\beta$ 约在 10^{-5} 数量级，λ_e 各人差异较大。

§4 位函数系数的测定和归一化

地球引力场位函数的系数 J_n、C_{nk} 和 S_{nk} 的大小是反映着地球的形状和内部密度分布情况，因此测定这些系数的数值是研究地球引力场的一个重要工作．地球引力场位函数的系数最初是通过地面实测重力资料来确定的．例如早在1952年苏联的戎格洛维奇（Жонголович）就公布了从2阶到4阶的系数值．1962年芬兰的乌泰拉（Uotila）也测得了这些系数，但相差较大．后来人造卫星发射后，根据卫星轨道变化情况也能测定这些系数．我们利用多颗各种不同轨道的卫星可以测定更高阶和级(即 n 和 k)的

系数,数值也更加准确。1962 年美国的伊萨克 (Izsak) 测定了从 2 阶到 9 阶的系数值。1966 年美国的库拉 (Kaula) 测定到 12 阶 12 级的系数值。1968 年美国的雷普 (Rapp) 测定到 14 阶 14 级的系数值。另外,日本的古在由秀 (Kozai),美国的加波斯奇金 (Gaposchkin) 和莱伯克 (Lambeck) 等也多次利用史密松天体物理台 (S. A. O) 所属的卫星观测站的照相资料、激光资料和库拉所得的实测重力场资料测得这些系数。

在 (1.50) 式中,球函数 $P_n^k(\sin\varphi)$ 对于不同的 n 和 k 数值可以相差很大,由此算出的 C_{nk} 和 S_{nk} 相差也会很大,处理起来很不方便。为此我们要对系数作归一化或称正规化 (Normalization) 处理。令

$$\begin{Bmatrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{Bmatrix} P_n^k(\sin\varphi) = \begin{Bmatrix} \bar{C}_{nk} \\ \bar{S}_{nk} \end{Bmatrix} \bar{P}_n^k(\sin\varphi). \tag{1.64}$$

空间中面元 $d\sigma = \cos\varphi d\varphi d\lambda$,对整个空间积分结果为 4π。因此我们要求

$$\iint_\sigma \bar{P}_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} \bar{P}_m^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} d\sigma = 4\pi\delta_{mn} \tag{1.65}$$

但是利用缔合勒让德函数的正交性可得积分:

$$\begin{aligned} &\iint_\sigma P_n^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} P_m^k(\sin\varphi)\begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos^2 k\lambda \\ \sin^2 k\lambda \end{Bmatrix} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n^k(\sin\varphi) P_m^k(\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi \\ &= \pi\int_{-1}^{1} P_n^k(\mu) P_m^k(\mu)\, d\mu \\ &= \frac{2\pi(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\delta_{mn} \end{aligned} \tag{1.66}$$

故令 $\bar{P}_n^k(\sin\varphi) = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}} P_n^k(\sin\varphi)$ 时 (1.65) 式就满足,我们称它为归一化了。将它们代入 (1.51) 式后可得归一

表 1-1 带谐系数 J_n（单位 10^{-6}）

J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}	J_{13}
1082.637,	−2.541,	−1.618,	−0.228,	−0.552,	−0.352,	−0.205,	−0.154,	−0.237,	0.312,	−0.192,	−0.339,
±1	±3	±1	±4	±2	±7	±2	±7	±2	±6	±2	±7
J_{14}	J_{15}	J_{16}	J_{17}	J_{18}	J_{19}	J_{20}	J_{21}	J_{22}	J_{23}	J_{24}	J_{25}
0.105,	0.105,	0.034,	−0.220	−0.102,	0.099,	−0.119,	−0.083,	0.092	0.145	−0.134,	0.199
±4	±9	±4	±10	±5	±11	±5	±11	±7	±15	±36	±22

表 1-2 归一化的带谐系数 $C_{n,0}$（单位 10^{-6}）

$\bar{C}_{2,0}$	$\bar{C}_{3,0}$	$\bar{C}_{4,0}$	$\bar{C}_{5,0}$	$\bar{C}_{6,0}$	$\bar{C}_{7,0}$	$\bar{C}_{8,0}$	$\bar{C}_{9,0}$
−48417.0,	96.0408.	53.9333,	6.87446,	−15.3097,	9.08860,	4.97198,	3.53300
$\bar{C}_{10,0}$	$\bar{C}_{11,0}$	$\bar{C}_{12,0}$	$\bar{C}_{13,0}$	$\bar{C}_{14,0}$	$\bar{C}_{15,0}$	$\bar{C}_{16,0}$	$\bar{C}_{17,0}$
5.17176,	−6.50565,	3.84000,	6.52406,	−1.94980,	−1.88586,	−0.591864,	3.71868
$\bar{C}_{18,0}$	$\bar{C}_{19,0}$	$\bar{C}_{20,0}$	$\bar{C}_{21,0}$	$\bar{C}_{22,0}$	$\bar{C}_{23,0}$	$\bar{C}_{24,0}$	$\bar{C}_{25,0}$
1.67687,	−1.58527,	1.85847,	1.26574,	−1.37146,	−2.11504,	1.59029	−2.32912

表1-3 归一化的田谐系数 $\bar{C}_{n,k}$ 和 $\bar{S}_{n,k}$（单位 10^{-6}）

$\bar{C}_{2,2}$	$\bar{S}_{2,2}$	$\bar{C}_{3,1}$	$\bar{S}_{3,1}$	$\bar{C}_{3,2}$	$\bar{S}_{3,2}$	$\bar{C}_{3,3}$	$\bar{S}_{3,3}$	$\bar{C}_{4,1}$
237.99,	−136.56,	199.77,	22.337,	77.830,	−75.519,	49.011,	152.83,	−51.748
$\bar{S}_{4,1}$	$\bar{C}_{4,2}$	$\bar{S}_{4,2}$	$\bar{C}_{4,3}$	$\bar{S}_{4,3}$	$\bar{C}_{4,4}$	$\bar{S}_{4,4}$	$\bar{C}_{5,1}$	$\bar{S}_{5,1}$
−48.140,	34.296	67.174,	103.90,	−11.923,	−10.512,	35.661,	−5.3667,	−7.9973
$\bar{C}_{5,2}$	$\bar{S}_{5,2}$	$\bar{C}_{5,3}$	$\bar{S}_{5,3}$	$\bar{C}_{5,4}$	$\bar{S}_{5,4}$	$\bar{C}_{5,5}$	$\bar{S}_{5,5}$	$\bar{C}_{6,1}$
59.869,	−39.910,	−58.429,	−16.338,	−11.583,	−4.5393,	13.956,	−86.841,	−7.2166
$\bar{S}_{6,1}$	$\bar{C}_{6,2}$	$\bar{S}_{6,2}$	$\bar{C}_{6,3}$	$\bar{S}_{6,3}$	$\bar{C}_{6,4}$	$\bar{S}_{6,4}$	$\bar{C}_{6,5}$	$\bar{S}_{6,5}$
1.7756,	2.4670,	−40.654,	0.44139,	2.9055,	−1.0003,	−30.297,	−13.504,	−60.964
$\bar{C}_{6,6}$	$\bar{S}_{6,6}$	$\bar{C}_{7,1}$	$\bar{S}_{7,1}$	$\bar{C}_{7,2}$	$\bar{S}_{7,2}$	$\bar{C}_{7,3}$	$\bar{S}_{7,3}$	$\bar{C}_{7,4}$
−29.136,	−26.327,	23.532,	5.5634,	20.425,	17.321,	21.994,	−34.644,	−28.617
$\bar{S}_{7,4}$	$\bar{C}_{7,5}$	$\bar{S}_{7,5}$	$\bar{C}_{7,6}$	$\bar{S}_{7,6}$	$\bar{C}_{7,7}$	$\bar{S}_{7,7}$	$\bar{C}_{8,1}$	$\bar{S}_{8,1}$
−27.738,	3.4727,	8.7014,	−27.496,	8.5865,	−2.4856,	−0.88968,	1.0946,	4.8429
$\bar{C}_{8,2}$	$\bar{S}_{8,2}$	$\bar{C}_{8,3}$	$\bar{S}_{8,3}$	$\bar{C}_{8,4}$	$\bar{S}_{8,4}$	$\bar{C}_{8,5}$	$\bar{S}_{8,5}$	$\bar{C}_{8,6}$
11.084,	10.359,	−8.8578,	−5.0715,	−22.315,	26.511,	13.318,	8.1158,	−9.7542
$\bar{S}_{8,6}$	$\bar{C}_{8,7}$	$\bar{S}_{8,7}$	$\bar{C}_{8,8}$	$\bar{S}_{8,8}$ ……	$\bar{C}_{24,24}$	…… $\bar{S}_{24,24}$		
28.082,	20.498,	24.592,	16.967,	9.3261, ……	0.34668,	2.2983		

化后的田谐系数是：

$$\bar{C}_{nk}=\sqrt{\frac{(n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!}}C_{nk},$$

$$\bar{S}_{nk}=\sqrt{\frac{(n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!}}S_{nk}. \tag{1.67}$$

同样利用勒让德多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1}P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

可得积分

$$\iint_\sigma P_n(\sin\varphi)P_m(\sin\varphi)d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\lambda\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}P_n(\sin\varphi)P_m(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4\pi}{2n+1}\delta_{mn}.$$

于是有 $\bar{P}_n(\sin\varphi)=\sqrt{2n+1}\ P_n(\sin\varphi)$，故得归一化后的带谐系数是：

$$\bar{J}_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}J_n\quad 或\quad \bar{C}_{n0}=-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}J_n. \tag{1.68}$$

值得指出的是各人采用的归一化方式不同，他们所推算的 $\bar{J}_n$，$\bar{C}_{nk}$ 和 $\bar{S}_{nk}$ 的数值也不一样，在作比较时需要注意。在实际使用中，往往田谐系数是经过归一化的而带谐系数是未经归一化的。

表 1-1、1-2 和 1-3 列出了加波斯奇金等在 1973 年所得史密松研究所标准地球(III)所载一组带谐系数和田谐系数的值。

§5 盘和环状天体引力场位函数

由§2所得到的几种位函数形式从原则上来说是适用于任何

形状的天体，只要这个天体的引力场是一个保守场即可。对于行星、卫星等接近于正球体的天体，我们可以采用形式如(1.50)式的位函数形式。但对于一些盘状或者环状的天体和系统再采用这种形式势必会由于级数收敛太慢不便计算或者实际上根本无法计算。本节针对着盘状或者环状的天体和系统给出一种封闭型的位函数形式。

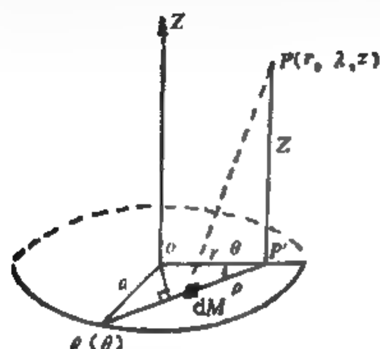


图 1-3

1. P 点在盘面上的投影 P' 在盘内即 $r\leqslant a$ 时的情形

设一个密度均匀的无限薄圆盘，其面密度为 σ，半径为 a。对于盘状天体显然可以采用柱面坐标系。在以盘心为原点，盘面为基本平面的坐标系中，盘外一点 P 的位置是 (r, λ, z)。盘面上的面元质量 $dM=\sigma\rho d\rho d\theta$。根据位函数的定义和对称原理，可得圆盘对 P 点的位函数为

$$V(r,z)=2G\sigma\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\rho(\theta)}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}. \tag{1.69}$$

其中 $\rho(\theta)$ 是盘的边缘，由图 1-3 可得：

$$\rho(\theta)=r\cos\theta+\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}. \tag{1.70}$$

由于 $\displaystyle\int_0^{\rho(\theta)}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\sqrt{\rho^2+z^2}\Big|_0^{\rho(\theta)}=\sqrt{\rho^2(\theta)+z^2}-|z|$，

利用(1.70)式可将(1.69)式写成为

$$V(r,z)=2G\sigma\left[\int_0^{\pi}\sqrt{(r\cos\theta+\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta})^2+z^2}\,d\theta\right.$$
$$\left.-\pi|z|\right]. \tag{1.71}$$

作变量变换

$$\xi=r\cos\theta+\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}=\rho(\theta). \tag{1.72}$$

由图 1-3 可得 $a^2=\xi^2+r^2-2\xi r\cos\theta$ 或者是：

$$\cos\theta=\frac{\xi^2+r^2-a^2}{2\xi r}. \tag{1.73}$$

由(1.73)式有 $-2r\sin\theta d\theta=\frac{1}{\xi^2}(\xi^2-r^2+a^2)d\xi$，利用

$$\begin{aligned}2r\sin\theta&=\sqrt{4r^2-(2r\cos\theta)^2}\\&=\frac{1}{\xi}\sqrt{4\xi^2r^2-(\xi^2+r^2-a^2)^2}\\&=\frac{1}{\xi}\sqrt{4r^2a^2-(\xi^2-r^2-a^2)^2}.\end{aligned}$$

可得：

$$-d\theta=\frac{\xi^2-r^2+a^2}{\xi\sqrt{4r^2a^2-(\xi^2-r^2-a^2)^2}}d\xi. \tag{1.74}$$

由(1.72)式可以得知积分限由 θ：$0\to\pi$ 变为 ξ：$a+r\to a-r$，这时(1.71)式化为

$$V(r,z)=2G\sigma\left[\int_{a-r}^{a+r}\frac{\sqrt{\xi^2+z^2}(\xi^2-r^2+a^2)}{\xi\sqrt{4r^2a^2-(\xi^2-r^2-a^2)^2}}d\xi-\pi|z|\right]. \tag{1.75}$$

再作变量变换

$$2ra\cos(2\phi)=\xi^2-r^2-a^2. \tag{1.76}$$

由(1.76)式可得：

$$\xi d\xi=-2ra\sin(2\phi)d\phi. \tag{1.77}$$

由于 $\cos2\phi=1-2\sin^2\phi$，故(1.76)式又可以写为

$$\xi^2=r^2+a^2+2ra\cos(2\phi)=(r+a)^2-4ra\sin^2\phi. \tag{1.78}$$

利用(1.76)和(1.77)式可得：

$$\frac{(\xi^2-r^2+a^2)d\xi}{\xi\sqrt{4r^2a^2-(\xi^2-r^2-a^2)^2}}=-\left(1+\frac{a^2-r^2}{\xi^2}\right)d\phi. \tag{1.79}$$

在(1.76)式的变量变换下，积分限由 ξ：$a-r\to a+r$ 变

为 ϕ：$\frac{\pi}{2}\to 0$。将 (1.78) 和 (1.79) 式代入 (1.75) 式后可得：

$$V(r,z)=2G\sigma\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(r+a)^2-4ra\sin^2\phi+z^2}\,d\phi\right.$$

$$\left.+(a^2-r^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{(r+a)^2-4ra\sin^2\phi+z^2}}{(r+a)^2-4ra\sin^2\phi}\,d\phi-\pi|z|\right]. \tag{1.80}$$

令

$$k^2=\frac{4ra}{(r+a)^2+z^2}<1,\quad n^2=\frac{4ra}{(r+a)^2}<1。\tag{1.81}$$

由于 $\frac{a^2-r^2}{(a+r)^2}=\frac{a-r}{a+r}$，故 (1.80) 式又可写为

$$V(r,z)=2G\sigma\left[\sqrt{(r+a)^2+z^2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{a-r}{a+r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}{1-n^2\sin^2\phi}\,d\phi\right)-\pi|z|\right]. \tag{1.82}$$

利用恒等式

$$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}{1-n^2\sin^2\phi}=\frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\left(k^2+\frac{n^2-k^2}{1-n^2\sin^2\phi}\right),$$

可将 (1.82) 式化为

$$V(r,z)=2G\sigma\left[\sqrt{(r+a)^2+z^2}\,E(k)\right.$$

$$+\frac{a-r}{a+r}\frac{k^2}{n^2}\sqrt{(r+a)^2+z^2}\,K(k)$$

$$+\frac{a-r}{a+r}\frac{n^2-k^2}{n^2}\sqrt{(r+a)^2+z^2}$$

$$\left.\times\Pi(n^2,k)-\pi|z|\right]. \tag{1.83}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}, \\
E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\, d\phi \\
\Pi(n^2,k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1-n^2\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}
\end{aligned}\right\}. \quad (1.84)
$$

它们分别为第一类、第二类和第三类完全椭圆积分.

由(1.81)式有 $\dfrac{k^2}{n^2}=\dfrac{(r+a)^2}{(r+a)^2+z^2}$，$\dfrac{n^2-k^2}{n^2}=\dfrac{z^2}{(r+a)^2+z^2}$，将它们代入(1.83)式后得到圆盘对 P 点的位函数为

$$
\begin{aligned}
V(r,z) = 2G\sigma\Bigg[&\sqrt{(r+a)^2+z^2}\,E(k) \\
&+ \frac{a^2-r^2}{\sqrt{(r+a)^2+z^2}}K(k) \\
&+ \frac{a-r}{a+r}\frac{z^2}{\sqrt{(r+a)^2+z^2}}\Pi(n^2,k) - \pi|z|\Bigg]. \quad (1.85)
\end{aligned}
$$

若 P 点在盘面上，在(1.85)式中令 $z=0$，则得这时的位函数为

$$
V(r,0) = 2G\sigma[(a+r)E(k)+(a-r)K(k)]. \quad (1.86)
$$

有时我们也可将第一类完全椭圆积分 $K(k)$ 和第二类完全椭圆积分 $E(k)$ 展为 k 的幂级数

$$
\left.\begin{aligned}
K(k) &= \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(2m-1)!!}{2^m m!}\right]^2 k^{2m}\right\} \\
E(k) &= \frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\left[\frac{(2m-1)!!}{2^m m!}\right]^2 k^{2m}\right\}
\end{aligned}\right\}. \quad (1.87)
$$

式中 $F(a,b,c,k^2)$ 是超几何级数，$(2m-1)!!=(2m-1)\times(2m-3)\cdots\cdots5\times3\times1$.

2. P 点在盘面上的投影 P' 在盘外即 $r > a$ 时的情形

由图 1-4 可得这时圆盘对 P 点的位函数为

$$V(r, z) = 2G\sigma \int_0^{\theta_0} d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \tag{1.88}$$

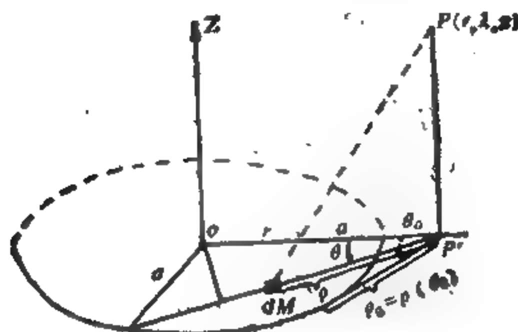


图 1-4

其中 $\theta_0 = \sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$，$\rho_1(\theta)$ 和 $\rho_2(\theta)$ 是盘的边缘，有 $\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$，$\rho_0 = \sqrt{r^2 - a^2}$ 由图 1-4 可以看出

$$\left.\begin{aligned} \rho_1(\theta) &= r\cos\theta - \sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta} \\ \rho_2(\theta) &= r\cos\theta + \sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta} \end{aligned}\right\}. \tag{1.89}$$

(1.88) 式对 $d\rho$ 积分后是

$$V(r, z) = 2G\sigma\int_0^{\theta_0} (\sqrt{\rho_2^2 + z^2} - \sqrt{\rho_1^2 + z^2})d\theta. \tag{1.90}$$

同样作变量变换

$$\xi = \rho(\theta) = r\cos\theta \pm \sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta}. \tag{1.91}$$

其中正号相应于 ρ_2，负号相应于 ρ_1。同样有

$$\cos\theta = \frac{\xi^2 + r^2 - a^2}{2\xi r}.$$

和

$$-d\theta=\frac{\xi^2-r^2+a^2}{\xi\sqrt{4r^2a^2-(\xi^2-r^2-a^2)^2}}d\xi,$$

仍作变量变换

$$2ra\cos(2\phi)=\xi^2-r^2-a^2.$$

这时积分限由 θ: $0\to\theta_0$ 变为 ξ: $r+a\to\rho_0$（对于 ρ_2），$r-a\to\rho_0$（对于 ρ_1）再变为 ϕ: $0\to\phi_0$（对于 ρ_2），$\frac{\pi}{2}\to\phi_0$（对于 ρ_1）。由于 $\int_0^{\theta_0}(\sqrt{\rho_2^2+z^2}-\sqrt{\rho_1^2+z^2})d\theta=\int_0^{\phi_0}f(\phi)d\phi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi_0}f(\phi)d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\phi)d\phi$，故由 (1.90) 式类似从 (1.71) 到 (1.85) 式可得这时圆盘对 P 点的位函数为

$$V(r,z)=2G\sigma\left[\sqrt{(r+a)^2+z^2}\,E(k)+\frac{a^2-r^2}{\sqrt{(r+a)^2+z^2}}K(k)+\frac{a-r}{a+r}\,\frac{z^2}{\sqrt{(r+a)^2+z^2}}\Pi(n^2,k)\right].\quad(1.92)$$

其中 k、n 和 $K(k)$、$E(k)$、$\Pi(n^2,k)$ 的定义仍为(1.81)和(1.84)式。

若 P 点在盘面上，这时的位函数形式仍为(1.86)式。

3. 环状天体引力场位函数

圆环可以看作为二个同心圆盘之差。我们假设圆环的内径和外径分别为 a 和 b，利用 (1.85) 和 (1.92) 式可以得到环状天体对 P 点的位函数是

$$\left.\begin{aligned}&V(r,z)=V(r,z,b)-V(r,z,a)\\&\qquad(\text{当 } r<a \text{ 或 } r>b \text{ 时})\\&V(r,z)=V(r,z,b)-V(r,z,a)-2\pi G\sigma|z|\\&\qquad(\text{当 } a<r<b \text{ 时})\end{aligned}\right\}.\quad(1.93)$$

其中 $V(r,z,a)$ 为(1.92)式，$V(r,z,b)$ 是将 (1.92) 式中的 a 改为 b（相应 k 和 n 中 a 也改为 b）。

令 $b \to a$，由(1.93)的第一式通过化简不难得出一个线环对 P 点的位函数是

$$V(r, z) = \frac{2GMK(k)}{\pi[(r+a)^2 + z^2]^{1/2}}, \tag{1.94}$$

其中 M 和 a 分别是线环的质量和半径，$k^2 = \frac{4ra}{(r+a)^2 + z^2}$。

第二章 二体问题

二体问题是天体力学中唯一能得到完全解的一个动力系统，二体问题又往往是多体问题和天体复杂运动的一阶近似，它是研究天体运动的一个基础，故是天体力学中一个基本问题。

§1 运动方程

设有两个天体 P_1 和 P_2，它们的质量分别是 M 和 m，根据(1.1)式在相互的引力作用之下，它们在惯性系的运动方程是：

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= \frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \\ m\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

这里 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. 如将原点选择在质心 O，如图 2-1，根据质心



图 2-1

的定义有 $M\boldsymbol{r}_1 + m\boldsymbol{r}_2 = 0$，$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}$，因此(2.1)式可写成：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -\frac{Gm^3}{(M+m)^2}\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3} \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= -\frac{GM^3}{(M+m)^2}\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

(2.2) 式是两组相互独立的二阶常微分方程，每一组有三个二阶微分方程组成，其完全解应有六个独立积分。

根据(2.2)，P_2 相对 P_1 的运动方程是：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(M+m)\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{2.3}$$

(2.3) 式也是三个二阶常微分方程. 可见对于二体问题,无论是相对质心的运动(惯性系)还是相对运动(非惯性系),其运动方程都是六阶的,可列成如下的统一形式:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{2.4}$$

若是相对运动 $\mu = G(M+m)$; 若是相对质心的运动 $\mu = \frac{GM^3}{(M+m)^2}$ $\left(或 \frac{Gm^3}{(M+m)^2}\right)$. (2.4) 式的完全解应该有六个独立积分.

§2 运动方程的积分

1. 面积积分(动量矩守恒)

将 (2.4) 式两端叉乘 $\boldsymbol{r}$ 得:

$$\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = 0,$$

积分得:

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{h}. \tag{2.5}$$

$\boldsymbol{h}$ 是积分常数, 显然它在数值上是质量为一个单位的质点的动量矩,故(2.5)式是二体问题的动量矩守恒定律. 若用 A, B, C 表示 $\boldsymbol{h}$ 的三个分量, 即

$$\boldsymbol{h} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}. \tag{2.6}$$

用 v 表示天体的速度则由(2.5)得:

$$rv\sin\alpha = h$$

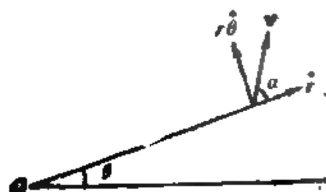


图 2-2

这里 $\alpha(<\pi)$ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 之夹角, h 是 $\boldsymbol{h}$ 之模. 因为 $v\sin\alpha$ 是 v 在横向方向(垂直向径方向)的分量即 $v\sin\alpha = r\dot{\theta}$, 故(2.5)式也可写成:

$$r^2\dot{\theta} = h, \tag{2.7}$$

而 $r^2\dot{\theta}$ 是向径 $\boldsymbol{r}$ 扫过的面积速度，因而(2.5)式也有面积积分之称。

由(2.5)得：

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{h}=0. \tag{2.8}$$

或

$$Ax+By+Cz=0.$$

(2.8)式是一个过原点而垂直于 $\boldsymbol{h}$ 的平面方程，这个平面称为轨道平面。$\boldsymbol{h}$ 的方向表示轨道面的法向。

2. 拉普拉斯 (Laplace) 积分，轨道曲线

将(2.4)式两端叉乘 $\boldsymbol{h}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}\times\ddot{\boldsymbol{r}}&=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{r}=-\frac{\mu}{r^3}[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{r}]\\&=-\frac{\mu}{r^3}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})]\\&=-\frac{\mu}{r^2}[r\boldsymbol{v}-\dot{r}\boldsymbol{r}]=-\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),\end{aligned}$$

积分得：

$$\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{v}=-\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r}-\mu\boldsymbol{e}. \tag{2.9}$$

$\boldsymbol{e}$ 为积分常数，有些书上记 $-\mu\boldsymbol{e}=\boldsymbol{F}$，则有：

$$\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{v}=-\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r}+\boldsymbol{F}. \tag{2.9'}$$

(2.9)式(或(2.9)′)称作为拉普拉斯积分，$\boldsymbol{F}$ 称作拉普拉斯积分常数。(2.9)式左端的向量 $\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{v}$ 与轨道共面，所以 $\boldsymbol{e}$(或 $\boldsymbol{F}$) 必在轨道面上。将(2.9)两端点乘 $\boldsymbol{r}$ 得：

$$\mu(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}+r)=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{h}=h^2$$

故：

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}+r=\frac{h^2}{\mu}. \tag{2.10}$$

在轨道平面上任取 ol 代表一极轴，设向量 $\boldsymbol{e}$ 与 ol 之夹角为

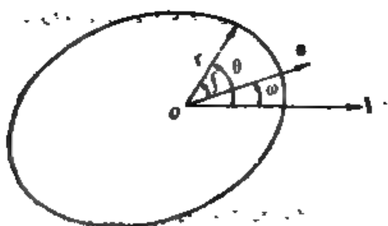


图 2-3

ω，$\boldsymbol{r}$ 与 ol 之夹角为 θ，$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 之夹角为 f 如图 2-3，则 $f = \theta - \omega$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e} = re\cos f, \tag{2.11}$$

将 (2.11) 代入 (2.10) 得：

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(\theta - \omega)}.$$

若令 $p = h^2/\mu$，则上式为

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}. \tag{2.12}$$

由解析几何知识知 (2.12) 是一个圆锥曲线方程，由此得出结论：二体问题的轨道是一圆锥曲线。积分常数 $\boldsymbol{e}$ 的模 e 是轨道的偏心率，p 称为半通径，它与半长径 a 和偏心率 e 的关系是：

$$p = a(1 - e^2) \tag{2.13}$$

由 (2.12) 式可知，当 $f = 0$ 时，$r = a(1-e)$，这是轨道上距原点(焦点)最近的一点称为近星点(或近日点)，这时 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 方向一致，故 $\boldsymbol{e}$ 指向近星点方向，ω 表示近星点之极角。(2.12) 式恰好是开普勒 (Kepler) 第一定律的数学表示，并将原定律加以推广，因为圆锥曲线可以是椭圆、抛物线、双曲线，在极限情况下甚至是直线，圆锥曲线的形状由参数 e 和 a 确定：

椭圆	$0 < e < 1$，	$a > 0$。
圆	$e = 0$，	$a = r$。
抛物线	$e = 1$，	$a \to \infty$。
双曲线	$e > 1$，	$a < 0$。

3. 活力积分(能量守恒)

将 (2.4) 式两端点乘 $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=-\frac{\mu}{r^2}\dot{r}。$$

积分得：

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{\mu}{r}+C。\tag{2.14}$$

显然这是能量积分，为了确定积分常数 C，可选择轨道上的一特殊点——近星点，这时 $r=a(1-e)$，$v=r\dot{\theta}$，故：

$$C=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2-\frac{\mu}{r}。$$

将 (2.7) 代入上式得：

$$C=\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2}-\frac{\mu}{r}=\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2(1-e)^2}-\frac{\mu}{a(1-e)}$$
$$=-\frac{\mu}{2a}。\tag{2.15}$$

(2.15) 代入 (2.14) 得：

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)。\tag{2.16}$$

(2.16) 称为活力积分，即能量积分。

二体问题的总能量 $E=mC=-\frac{\mu m}{2a}$。对于椭圆轨道 $a>0$，故 $E<0$。对于抛物线轨道因为 $a\to\infty$，故 $E=0$，说明动能与位能相等。对于双曲线轨道 $a<0$，故 $E>0$。

通常人们用轨道根数来表述天体的位置，常用的轨道根数是：轨道平面的倾角 i，轨道升交点角距 Ω。这是两个确定轨道平面在空间位置的参数。另外，轨道半长径 a 和偏心率 e 确定了轨道的大小和形状。确定轨道在轨道平面上的方向的参数是 ω，另一个轨道根数是过近星点时刻 τ。

从前一节的讨论中，我们可以看出动量矩常数 h (A、B、C)

同样可以决定轨道平面在空间的位置和轨道的大小。

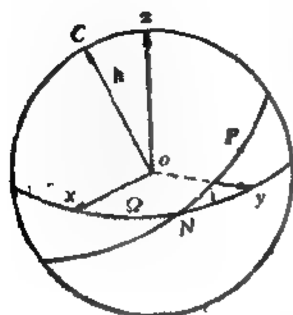


图 2-4

在图(2-4)中 o-xyz 为空间一直角坐标，o 为主星体的位置。xy 平面作为参考平面。轨道平面与它交于 N，轨道平面对 xy 平面的倾角为 i。$xN=\Omega$，则 h 的三个分量是：

$$\left.\begin{aligned} A &= h\cos Cx \\ B &= h\cos Cy \\ C &= h\cos Cz \end{aligned}\right\}。\qquad (2.17)$$

根据球面三角形的余弦定律有：

$$\left.\begin{aligned} \cos Cx &= \sin\Omega\sin i \\ \cos Cy &= -\cos\Omega\sin i \\ \cos Cz &= \cos i \end{aligned}\right\}。\qquad (2.18)$$

(2.18)式代入(2.17)式得：

$$\left.\begin{aligned} A &= h\sin\Omega\sin i \\ B &= -h\cos\Omega\sin i \\ C &= h\cos i \end{aligned}\right\}。\qquad (2.19)$$

或

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\Omega &= \frac{A}{B} \\ \operatorname{tg} i &= \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C} \end{aligned}\right\}。\qquad (2.20)$$

§3 开普勒方程及其解法

前一节我们已经得到了二体问题的五个独立积分，开普勒方程是二体问题的另一个独立积分，它表示了天体在轨道上的位置与时间的关系，由于椭圆、曲双线和抛物线三种运动的开普勒方程形式不同，下面分别推导。

1. 椭圆运动的开普勒方程

天体的速度在极坐标系中可分解成径向分量和横向分量，即 $v = \dot{r}r_0 + r\dot{\theta}\theta_0$，故 $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$，则：

$$\dot{r}^2 = v^2 - r^2\dot{\theta}^2,$$

利用 (2.7) 和 (2.16) 式得：

$$\dot{r}^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{h^2}{r^2}. \tag{2.21}$$

而 $h^2 = \mu p$，对于椭圆运动 $h = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$ 故有：

$$\mu = \frac{h^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = n^2a^3. \tag{2.22}$$

这里 $n = \dfrac{2\pi}{T}$，T 是椭圆运动的恒量周期，n 称为平均运动。(2.22) 式是对开普勒第三定律的修正。它表明椭圆轨道半长径的立方与周期平方之比与主星体的质量以及天体本身的质量有关，即：

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}. \tag{2.22'}$$

(2.22)′ (或 (2.22)) 是严格的开普勒第三定律。

将 (2.22) 式代入 (2.21) 得：

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na}{r}\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2},$$

即：

$$\frac{r\,dr}{a\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}} = n\,dt. \tag{2.23}$$

引入辅助量 E，使 E 满足：

$$r = a(1 - e\cos E), \tag{2.24}$$

利用 (2.24) 将 E 置换 r 则 (2.23) 变成：

$$(1 - e\cos E)\,dE = n\,dt,$$

积分得：

$$E - e\sin E = n(t-\tau) = M. \tag{2.25}$$

(2.25) 称为椭圆运动的开普勒方程，τ 为积分常数．当 $t=\tau$ 时 $E=0$，则由 (2.24) 得 $r=a(1-e)$，故 τ 是天体过近星点时刻．$M=n(t-\tau)$ 称为平近点角，E 称为偏近点角，将 (2.12) 与 (2.24) 结合可得 f 角与 E 的关系是：

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{2.26}$$

f 称为真近点角．

2. 双曲线运动的开普勒方程

对于双曲线运动，因为 $a<0$，故令 $a_1=-a>0$，则由 (2.21) 式得：

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu}{r^2 a_1}[(a_1+r)^2 - a_1^2 e^2];$$

即：

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a_1}}\sqrt{(a_1+r)^2 - a_1^2 e^2}. \tag{2.27}$$

引入辅助量 F，使 F 满足：

$$r = a_1(e\operatorname{ch}F - 1), \tag{2.28}$$

将 F 置换 r，(2.27) 式成为

$$(e\operatorname{ch}F - 1)dF = \frac{1}{a_1}\sqrt{\frac{\mu}{a_1}}\,dt.$$

令 $\nu = \frac{1}{a_1}\sqrt{\frac{\mu}{a_1}}$，积分上式得：

$$e\operatorname{Sh}F - F = \nu(t-\tau), \tag{2.29}$$

其中 τ 为积分常数，其意义是过近星点的时刻．(2.29) 式便是双曲运动的开普勒方程．

3. 抛物线运动的开普勒方程

对于抛物线运动，$e=1$，故轨道方程 (2.12) 可写成：

$$r = \frac{p}{1 + \cos f} = q \sec^2 \frac{f}{2}. \qquad (2.30)$$

其中 $q = \frac{p}{2}$，是抛物线轨道的近星（日）距。将(2.30)式代入(2.7)，则：

$$\frac{df}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{\sqrt{2\mu q}}{q^2 \sec^4 \frac{f}{2}},$$

即：

$$q^2 \sec^4 \frac{f}{2} df = \sqrt{2\mu}\, q^{\frac{1}{2}} dt,$$

积分得：

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, q^{-\frac{3}{2}} (t - \tau). \qquad (2.31)$$

(2.31)式是抛物线运动的开普勒方程形式，积分常数 τ 的意义同前。

4. 开普勒方程的解法

开普勒方程(2.25)是一个超越方程，只能得到近似解。在讨论它的解法以前，应该指出的是方程(2.25)的解是存在且唯一的。将(2.25)式写成：

$$F(E) = E - e \sin E - M = 0. \qquad (2.32)$$

当M给定后，总可以找到一个适当的整数k使得：

$$k\pi \le M < (k + 1)\pi.$$

现可证明在 $[k\pi, (k+1)\pi]$ 之内 $F(E) = 0$ 的解存在且唯一。由(2.32)

$$F(k\pi) = k\pi - M \le 0,$$

$$F((k + 1)\pi) = (k + 1)\pi - M > 0,$$

又

$$\frac{dF}{dE} = 1 - e \cos E > 0.$$

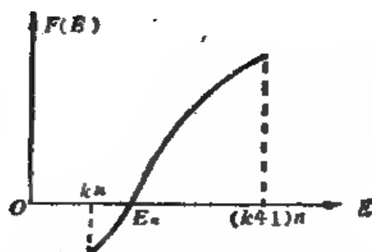


图 2-5

故函数 $F(E)$ 在 $[k\pi,(k+1)\pi]$ 之内连续且单调递增，从而 $f(E)$ 与 E 轴有且仅有一交点图(2-5)，设该点的值为 E_n，E_n 即为 $F(E)=0$ 的唯一解。

由方程的近似解法可知，欲解方程 $f(x)=0$，而该方程又可写成 $x=\varphi(x)$ 的形式，并且在 $[a,b]$ 之内有 $\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|<1$，则可用迭代法求出 $x_1=\varphi(x_0)$，$x_2=\varphi(x_1)$，$\cdots$，$x_n=\varphi(x_{n-1})$，x_0，x_1，$x_2\cdots$，x_n 收敛，并且当 $n\to\infty$ 时 x_n 便是方程的解。显然方程(2.25)满足这些条件，故解(2.25)的迭代公式是：

$$\left.\begin{array}{l}E_1=M+e\sin E_0\\E_2=M+e\sin E_1\\E_3=M+e\sin E_2\\\quad\vdots\\E_n=M+e\sin E_{n-1}\end{array}\right\}\qquad(2.33)$$

(2.33)式中 E、M 以弧度为单位，如果以度为单位，则(2.33)右端第二项应乘以 $\frac{180}{\pi}$。(2.33)式迭代到何时为止？这可根据需要的精度而定，一般说事先给一精度要求 ε，当 $|E_n-E_{n-1}|\leqslant\varepsilon$ 即可终止迭代。假如偏心率 e 较大，用(2.33)式迭代收敛较慢，则可用牛顿迭代法(微分改正法)。

欲解 $f(x)=0$，在 $x=x_0$ 点将 $f(x)$ 台劳展开，并只取 $(x-x_0)$ 的一次幂项，则：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0,$$

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{2.34}$$

以(2.34)式为迭代公式，逐次逼近，求出 x_0，具体应用于解(2.25)，其迭代公式是：

$$\left.\begin{aligned}
E_1&=E_0-\frac{E_0-e\sin E_0-M}{1-e\cos E_0}\\
E_2&=E_1-\frac{E_1-e\sin E_1-M}{1-e\cos E_1}\\
&\vdots\\
E_n&=E_{n-1}-\frac{E_{n-1}-e\sin E_{n-1}-M}{1-e\cos E_{n-1}}
\end{aligned}\right\}, \tag{2.35}$$

如若采用电子计算机解开普勒方程．实际上无论采用那种方法都能很快得到结果．

§4 天体的位置计算

精确计算一个天体的空间位置应该周密地考虑各种摄动因素．这一工作是天体力学理论的一个实际应用，也可以独立地作为天体力学的一个分支，通常称为历书天文学．本节仅以二体问题为力学模型，介绍天体位置计算的一些基本公式．根据一般工作的需要，下面介绍在轨道坐标系、黄道坐标系和赤道坐标系中天体位置的计算公式．

1. 轨道坐标 $(\xi\eta\zeta)$ 的计算

设 $o\text{-}\xi\eta\zeta$ 是一轨道坐标系，原点 o 为主星体位置，$\xi\eta$ 平面即轨道面，ξ 轴指向近日(星)点．某一天体 P (如行星)的位置 r，在该坐标系里的三个分量显然是：

$$\left.\begin{aligned}
\xi&=r\cos f\\
\eta&=r\sin f\\
\zeta&=0
\end{aligned}\right\},$$

利用偏近点角 E 与真近点角 f 的关系，可得：

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos f \\ &= a(\cos E - e) \\ \eta &= r\sin f \\ &= a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \end{aligned}\right\}, \quad (2.36)$$

$$\zeta = 0$$

图 2-6

故

$$\boldsymbol{r} = a(\cos E - e)\boldsymbol{P} + a\sqrt{1-e^2}\,\sin E\,\boldsymbol{Q}, \quad (2.37)$$

$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 代表在轨道面上 $f=0$ 和 $f=\frac{\pi}{2}$ 方向的单位向量。将(2.37)式对时间求导，得天体的速度在该坐标系的表示式：

$$\boldsymbol{v} = -\frac{a^2 n}{r}\sin E\,\boldsymbol{P} + \frac{a^2 n\sqrt{1-e^2}}{r}\cos E\,\boldsymbol{Q}. \quad (2.38)$$

2. 日心黄道坐标(xyz)的计算

图(2-7)中 $o\text{-}\xi\eta\zeta$ 表示轨道坐标，$o\text{-}xyz$ 表示日心黄道直角坐标，$o\text{-}x'y'z'$ 表示日心赤道直角坐标。从图中可以看出，当轨道坐标系绕 ζ 轴顺时针旋转 ω 角，绕 ξ 轴顺时针旋转 i，再绕 ζ 轴

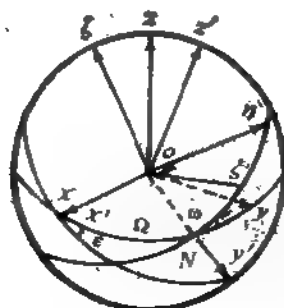


图 2-7

顺时针旋转Ω角后，将与日心黄道坐标 $o\text{-}xyz$ 重合，所以可通过三次坐标旋转来实现轨道坐标到日心黄道坐标的转换，即：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Z(-\Omega)X(-i)Z(-\omega)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

这里 $X(\alpha)$、$Y(\alpha)$，$Z(\alpha)$ 表示旋转矩阵，它们的表示式是：

$$X(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$Y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

根据(2.40)式得：

$$Z(-\Omega)X(-i)Z(-\omega) = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i, & -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i, & \sin i\sin\Omega, \\ \cos\omega\sin\Omega + \cos\Omega\sin\omega\sin i, & -\sin\Omega\sin\omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i, & -\sin i\cos\Omega, \\ \sin i\sin\omega, & \cos\omega\sin i, & \cos i, \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

故：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}; \tag{2.42}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x &= P_x\xi + Q_x\eta + R_x\zeta \\ y &= P_y\xi + Q_y\eta + R_y\zeta \\ z &= P_z\xi + Q_z\eta + R_z\zeta \end{aligned}\right\}. \tag{2.42}$$

显然，$\boldsymbol{P}(P_x, P_y, P_z)$、$\boldsymbol{Q}(Q_x, Q_y, Q_z)$、$\boldsymbol{R}(R_x, R_y, R_z)$ 代表轨道坐标轴方向的三个单位向量，P_x、P_y……R_z 等是三个轨道坐标轴在日心黄道坐标系中的方向余弦。

3. 日心赤道坐标（$x'y'z'$）和视位置的计算

从图 2-7 中也可看出，只要将 $o\text{-}xyz$ 坐标系绕 x 轴顺时针方向旋转 ε 角（黄赤夹角）便得日心赤道坐标，即：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X(-\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

再将坐标原点移至地心，便得地心赤道直角坐标（$x''y''z''$）：

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_\odot \\ Y_\odot \\ Z_\odot \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

其中（$X_\odot Y_\odot Z_\odot$）表示太阳的赤道直角坐标。设（α, δ）为天体的赤经和赤纬，根据球坐标与直角坐标的关系得：

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \rho\cos\delta\cos\alpha \\ y'' &= \rho\cos\delta\sin\alpha \\ z'' &= \rho\sin\delta \end{aligned}\right\},$$

从而得：

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{y''}{x''} \\ \operatorname{tg}\delta &= \frac{z''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}} \\ \rho &= (x''^2 + y''^2 + z''^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}. \tag{2.45}$$

ρ 是天体离地心的距离。用以上计算公式得到的（α, δ）并不是天体真正的视位置。在计算公式中所采用的轨道根数 Ω、i、ω 以

及 ε、$X_{\odot}$、$Y_{\odot}$、$Z_{\odot}$ 都是对应某一历元的平春分点和平赤道的，需要经过岁差、章动、光行差和周日视差的改进才能得到所求时刻的视位置。

§5 椭圆运动的幂级数展开

在§3节中，通过用数值方法解开普勒方程，可以求出对应某一M值时的E值。但是，在理论研究中，尤其在摄动理论中，往往要将椭圆运动中的一些变量如r、E、f等表示成时间的函数。即使是近似的也对分析问题大为有益。平近点角M是时间t的线性函数，因而可将一些与时间有关的量表示成M的三角级数。此外，利用偏心率e是小量，将一些量展开成e的幂级数，下面介绍拉格朗日（Lagrange）级数在椭圆运动展开中的应用。

1. 拉格朗日级数的一般形式

若y是x、α的函数，且满足

$$y=x+\alpha\phi(y), \tag{2.46}$$

其中 $0<\alpha<1$，$\phi(y)$ 是y的解析函数，则y的任意函数 $F(y)$ 可以展开成α的幂级数，其形式是

$$F(y)=F(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\phi^n(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right], \tag{2.47}$$

(2.47)式称为拉格朗日级数。

因y是α、x的函数，故y的任意函数 $F(y)$ 也是α、x的函数，令 $F(y)$ 在 $\alpha=0$ 点台劳展开

$$F(y)=F(y)_{\alpha=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial\alpha^n}\right)_{\alpha=0}, \tag{2.48}$$

而
$$F(y)_{\alpha=0}=F(x), \tag{2.49}$$

又由 (2.46) 式得：

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}=\phi(y)+\alpha\frac{d\phi(y)}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial\alpha}, \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=1+\alpha\frac{d\phi(y)}{dy}\frac{\partial y}{\partial x},\tag{2.51}$$

将(2.51)两端乘 $\phi(y)$，然后与(2.50)式相减得：

$$\left(1-\alpha\frac{d\phi(y)}{dy}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}-\phi(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0,\tag{2.52}$$

一般说 $1-\alpha\frac{d\phi(y)}{dy}\neq 0$，若等于零，$\phi(y)$ 只能是 y 的线性函数，这就失去 $\phi(y)$ 是 y 的任意函数这个一般的条件，因此必须满足：

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\phi(y)\frac{\partial y}{\partial x}.\tag{2.53}$$

将 $F(y)$ 也分别对 α 和 x 求导，并利用(2.53)式，则有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(y)}{\partial \alpha}&=\frac{dF(y)}{dy}\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\frac{dF(y)}{dy}\phi(y)\frac{\partial y}{\partial x}\\&=\phi(y)\frac{\partial F(y)}{\partial x}.\end{aligned}\tag{2.54}$$

将(2.54)再对 α 求偏导，并利用(2.54)式，则有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(y)}{\partial \alpha^2}&=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\phi(y)\frac{\partial F(y)}{\partial x}\right]\\&=\frac{\partial F(y)}{\partial x}\frac{\partial \phi(y)}{\partial \alpha}+\phi(y)\frac{\partial^2 F(y)}{\partial \alpha\partial x}\\&=\frac{\partial \phi(y)}{\partial x}\phi(y)\frac{\partial F(y)}{\partial x}+\phi(y)\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(y)\frac{\partial F(y)}{\partial x}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(y)\phi(y)\frac{\partial F(y)}{\partial x}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi^2(y)\frac{\partial F(y)}{\partial x}\right].\end{aligned}\tag{2.55}$$

读者可以用数学归纳法证明：

$$\frac{\partial^n F(y)}{\partial \alpha^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\phi^n(y)\frac{\partial F(y)}{\partial x}\right].\tag{2.56}$$

(2.56)式表明 $F(y)$ 对 α 的任意阶导数可以由 $\phi(y)$ 和 $F(y)$ 对

x 的导数表示，故：

$$\left(\frac{\partial^n F(y)}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\phi^n(y)\frac{\partial F(y)}{\partial x}\right]\right]_{\alpha=0}$$

$$= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\phi^n(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right]. \qquad (2.57)$$

将 (2.57) 式代入 (2.48) 便得拉格朗日级数 (2.47)。

2. 拉格朗日级数展开椭圆运动

根据椭圆运动的开普勒方程

$$E = M + e\sin E, \qquad (2.25)$$

可令(2.46)式中的 $y = E$, $x = M$, $\alpha = e < 1$, $\phi(y) = \sin E$，于是由 (2.47) 式得：

$$F(E) = F(M) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}\left[\sin^n M\frac{\partial F(M)}{\partial M}\right]. \qquad (2.58)$$

利用 (2.58) 式可将椭圆运动中任意 E 的函数展开成 e 的幂级数，其系数是 M 的函数。

例 1 将 E 表示成 e 的幂级数。

令 $F(E) = E$，则 $F(M) = M$，$\frac{\partial F(M)}{\partial M} = 1$，故由(2.58)式得：

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}[\sin^n M]$$

$$= M + e\sin M + \frac{e^2}{2!}\sin 2M$$

$$+ \frac{e^3}{3!\,2^2}[3^2\sin 3M - 3\sin M]$$

$$+ \cdots\cdots \qquad (2.59)$$

(2.59) 式可看成开普勒方程的一个分析解。

例 2 展开 $\cos E$ 为 e 的幂级数。

令 $F(E) = \cos E$，$F(M) = \cos M$，$\frac{dF(M)}{dM} = -\sin M$，于

是由 (2.58) 得:

$$\cos E = \cos M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}M^{n-1}}[-\sin^{n+1} M]$$

$$= \cos M - \frac{e}{2}(1 - \cos 2M)$$

$$- \frac{e^2}{2!}\frac{1}{2^2}(3\cos M - 3\cos 3M)$$

$$- \frac{e^3}{3!}\frac{1}{2^3}(4 \times 2^2\cos 2M - 4^2\cos 4M) + \cdots\cdots.$$

例3 展开 $\left(\frac{a}{r}\right)^2$。

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 - e\cos E}\right)^2 = (1 - e\cos E)^{-2}$$

$$= (1 + 2e\cos E + 3e^2\cos^2 E + 4e^3\cos^3 E + \cdots).$$

利用(2.60)式的结果,若只取到 e^3 项,则上式为

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 + 2e\cos M + \frac{e^2}{2}(5\cos 2M + 1)$$

$$+ \frac{e^3}{4}(13\cos 3M + 3\cos M) + \cdots. \qquad (2.61)$$

例4 展开真近点角 f。

因为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}M} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}M} = \dot{f}/n = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2 n}$$

$$= \left(\frac{a}{r}\right)^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}},$$

将 (2.61) 式代入上式得:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}M} = 1 + 2e\cos M + \frac{5}{2}e^2\cos 2M$$

$$+ \frac{e^3}{4}(13\cos 3M - \cos M) + \cdots.$$

上式两端积分得:

$$f = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M$$
$$+ \frac{e^3}{12}(13\sin 3M - 3\sin M) + \cdots. \tag{2.62}$$

§6 椭圆运动的三角级数展开

由于椭圆运动中所有与 M 有关的变量都是周期为 2π 的周期函数，故可用富里叶（Fourier）展开，将 M 的函数 $f(M)$ 展开成富里叶级数：

$$f(M) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nM + B_n\sin nM), \tag{2.63}$$

其中系数：

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\mathrm{d}M \\ A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\cos nM\,\mathrm{d}M \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\sin nM\,\mathrm{d}M \end{aligned}\right\}. \tag{2.64}$$

若 $f(M)$ 为偶函数 $B_n = 0$，

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(M)\cos nM\,\mathrm{d}M.$$

若 $f(M)$ 为奇函数 $A_n = 0$，

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(M)\sin nM\,\mathrm{d}M.$$

用富里叶级数展开椭圆运动时，将遇到贝塞尔（Bessel）函数及其某些性质。

1. 贝塞尔函数的定义及性质

(1) 贝塞尔函数的定义

定义 x 的一个无穷幂级数：

$$J_n(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(n+q)!\,q!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2q+n}, \tag{2.65}$$

称为 n 阶第一类贝塞尔函数，其中 n 是任意整数；从数学物理方程的知识可知，贝塞尔函数是贝塞尔方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{2.66}$$

的级数解。

若定义函数：

$$U = e^{\frac{x}{2}(z - z^{-1})},$$

这里 z 是任意复数，x 是任意实数，e 为自然对数之底．显然

$$U = e^{\frac{x}{2}z}\, e^{-\frac{x}{2z}} \tag{2.67}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(\frac{x}{2}z\right)^p \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}\left(-\frac{x}{2}z^{-1}\right)^q$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\frac{(-1)^q}{q!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+q} z^{p-q}, \tag{2.68}$$

令 $p - q = n$，则 $p + q = 2q + n$，故 (2.68)式成为

$$U = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)!}\frac{(-1)^q}{q!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2q+n} z^n$$

将 (2.65) 式代入上式得：

$$U = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n, \tag{2.69}$$

可见 U 是 $J_n(x)$ 的母函数。从 U 的定义我们还可以得到贝塞尔函数的定积分形式。

由 (2.67) 式看出 $z = 0$ 是函数 U 的奇点，根据复变函数的知识，U 可在 $0 < |z| < \infty$ 内作罗朗 (Laurent) 展开：

$$U = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

系数

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{U(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

设积分路径 C 为一单位圆 $z = e^{i\theta}$，则

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{x}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}}{e^{i(n+1)\theta}}\,d(e^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix\sin\theta}}{e^{in\theta}}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\theta-n\theta)}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta \\ &\quad + \frac{i}{2\pi}\int \sin(x\sin\theta - n\theta)d\theta, \end{aligned}$$

a_n 取实部则有：

$$U = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta x^n. \tag{2.70}$$

比较 (2.69) 与 (2.70) 得：

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta. \tag{2.71}$$

(2.71)式为贝塞尔函数的定积分形式。

(2) 贝塞尔函数的性质。

贝塞尔函数有以下性质：

$$\left.\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n J_n(x) \\ J_n(-x) &= (-1)^n J_n(x) \\ J_{-n}(x) &= J_n(-x) \\ J_{-n}(-x) &= J_n(x) \\ J_{n+1}(x) &= \frac{1}{x}[2nJ_n(x) - xJ_{n-1}(x)] \end{aligned}\right\}. \tag{2.72}$$

(2.72) 的前四式读者从贝塞尔函数的定义很容易证得，(2.72) 的最后一式证明如下：

因为 $$\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)z^n = e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})}.$$

上式两端对 z 求导

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)nz^{n-1} = \frac{x}{2}\left[e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} + e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})}z^{-2}\right]$$

$$= \frac{x}{2}\left[\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n + \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)z^{n-2}\right],$$

上式对任意的 z 都成立，比较 z 的同次幂系数有：

$$nJ_n(x) = \frac{x}{2}\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right],$$

故

$$J_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\left[2nJ_n(x) - xJ_{n-1}(x)\right]. \qquad (2.73)$$

(2.73)式称为贝塞尔函数的递推公式，根据此式可从 n, $n-1$ 阶的贝塞尔函数推算出任意阶的贝塞尔函数。

2. 椭圆运动的富里叶展开

由联系偏近点角 E 与平近点角 M 的开普勒方程 (2.25) 可知，当 E 增加 (减少) 2π 时，M 也必增加 (减少) 2π；当 E 由 $+E \to -E$ 时，M 也由 $+M \to -M$。所以凡是周期为 2π 的 E 的周期函数也必是 M 的周期函数，并且函数的奇偶性也不变。下面利用 (2.63) 式具体展开某些 E 的函数为 M 的三角级数。

例 1 展开 $\cos kE$，其中 k 为任意整数。

因 $\cos kE$ 为 M 的偶函数，故 $B_{n,k} = 0$

$$\cos kE = \frac{1}{2} A_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn}\cos nM$$

系数

$$A_{kn} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kE \, dM$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kE(1 - e\cos E)dE$$

$$= -\frac{2e}{\pi}\int_0^{\pi}\cos kE\cos E\,\mathrm{d}E$$

$$= -\frac{e}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos(k+1)E\,\mathrm{d}E + \int_0^{\pi}\cos(k-1)E\,\mathrm{d}E\right]$$

$$= \begin{cases} -e & (k=1) \\ 0 & (k \neq 1). \end{cases} \tag{2.74}$$

$$A_{k,n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos kE\cos nM\,\mathrm{d}M$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos kE\,\mathrm{d}(\sin nM)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin nM\cos kE\Big|_0^{\pi} + \frac{2k}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nM\sin kE\,\mathrm{d}E$$

$$= \frac{2k}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin n(E - e\sin E)\sin kE\,\mathrm{d}E$$

$$= \frac{k}{n\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos[(n-k)E - ne\sin E]\,\mathrm{d}E - \int_0^{\pi}\cos[(n+k)E - ne\sin E]\,\mathrm{d}E\right\}.$$

利用(2.71)式，有

$$A_{k,n} = \frac{k}{n}\left[J_{n-k}(ne) - J_{n+k}(ne)\right], \tag{2.75}$$

故当 $k=1$ 时

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)\right]\cos nM. \tag{2.76}$$

当 $k \neq 1$ 时

$$\cos kE = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n}\left[J_{n-k}(ne) - J_{n+k}(ne)\right]\cos nM. \tag{2.77}$$

例 2 展开 $\sin kE$。

因为 $\sin kE$ 为 M 的奇函数，故 $A_{n,k}=0$

$$\sin kE=\sum_{n=1}^{+\infty} B_{n,k}\sin nM,$$

和例 1 作类似的运算得：

$$B_{k,n}=\frac{k}{n}\left[J_{n+k}(ne)+J_{n-k}(ne)\right],$$

所以

$$\sin kE=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n}\left[J_{n+k}(ne)+J_{n-k}(ne)\right]\sin nM. \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}\sin E&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[J_{n+1}(ne)+J_{n-1}(ne)\right]\sin nM\\&=\frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM.\end{aligned} \tag{2.79}$$

例 3 展开 $\frac{a}{r}$。

$$\begin{aligned}\frac{a}{r}&=\frac{1}{1-e\cos E}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}M}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M}(M+e\sin E)\\&=1+e\frac{\mathrm{d}\sin E}{\mathrm{d}M},\end{aligned}$$

将 (2.79) 式代入

$$\frac{a}{r}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(ne)\cos nM. \tag{2.80}$$

3. 真近点角 f 与偏近点角 E 的关系

利用复变量的幂级数展开，可实现 f 与 E 的相互表示。

设 ξ 和 η 分别代表 f 和 E 的指数函数

$$\left.\begin{aligned}\xi&=e^{if}\\ \eta&=e^{iE}\end{aligned}\right\}, \tag{2.81}$$

这里 e 仍为自然对数之底，则根据欧拉公式

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\frac{f}{2} &= \frac{1}{2}\left(\xi^{\frac{1}{2}} + \xi^{-\frac{1}{2}}\right)\\
\sin\frac{f}{2} &= \frac{1}{2i}\left(\xi^{\frac{1}{2}} - \xi^{-\frac{1}{2}}\right)\\
\cos\frac{E}{2} &= \frac{1}{2}\left(\eta^{\frac{1}{2}} + \eta^{-\frac{1}{2}}\right)\\
\sin\frac{E}{2} &= \frac{1}{2i}\left(\eta^{\frac{1}{2}} - \eta^{-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}\right\}, \tag{2.82}
$$

故有

$$
\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \frac{1}{i}\,\frac{\xi^{\frac{1}{2}} - \xi^{-\frac{1}{2}}}{\xi^{\frac{1}{2}} + \xi^{-\frac{1}{2}}}, \tag{2.83}
$$

$$
\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \frac{1}{i}\,\frac{\eta^{\frac{1}{2}} - \eta^{-\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{1}{2}} + \eta^{-\frac{1}{2}}}. \tag{2.84}
$$

将 (2.83) 和 (2.84) 代人 (2.26) 式得:

$$
\frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{\eta - 1}{\eta + 1}. \tag{2.85}
$$

再定义偏心率 e 为

$$
e = \sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}, \tag{2.86}
$$

其中

$$
\beta = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} < 1. \tag{2.87}
$$

由 (2.86) 得:

$$
\beta = \frac{1}{e}\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right). \tag{2.88}
$$

将 (2.86) 代人 (2.85) 得:

$$
\frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \frac{1+\beta}{1-\beta}\,\frac{\eta - 1}{\eta + 1},
$$

从而得:

或

$$
\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{\eta - \beta}{1 - \beta\eta} = \eta(1 - \beta\eta^{-1})(1 - \beta\eta)^{-1} \\
\eta &= \frac{\xi + \beta}{1 + \beta\xi} = \xi(1 + \beta\xi^{-1})(1 + \beta\xi)^{-1}
\end{aligned}\right\}, \tag{2.89}
$$

将(2.89)作对数运算：

$$
\ln\xi = \ln\eta + \ln(1 - \beta\eta^{-1}) - \ln(1 - \beta\eta), \tag{2.90}
$$

因为 $|\beta\eta| < e < 1$，故

$$
\left.\begin{aligned}
\ln(1 - \beta\eta^{-1}) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n\eta^{-n}/n \\
\ln(1 - \beta\eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n\eta^n/n \\
\ln\eta &= iE
\end{aligned}\right\}. \tag{2.91}
$$

将(2.91)代入(2.89)得：

$$
\begin{aligned}
if &= iE - \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n\eta^{-n}/n + \sum\beta^n\eta^n/n \\
&= iE + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \beta^n(\eta^n - \eta^{-n}) \\
&= iE + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta^n}{n} \sin nE,
\end{aligned}
$$

所以

$$
f = E + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE. \tag{2.92}
$$

同理可得：

$$
E = f + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\beta^n}{n} \sin nf. \tag{2.93}
$$

§7 天体的直角坐标和速度展成时间的幂级数

天体的位置和速度是时间 t 和轨道根数的函数，对于二体问题、

题而言，轨道根数由初始时刻的位置和速度确定，因而任意时刻的位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$，展开成时间 t 的幂级数时，其幂的系数必是初始位置和速度的函数。

选取理论单位，使 $\mu=1$，则二体问题的运动方程成为

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{2.94}$$

将 $\boldsymbol{r}$ 在 $t=t_0$ 点作台劳展开，并令 $t-t_0=\tau$，则 $\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\tau}$。

$$\boldsymbol{r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n\boldsymbol{r}}{d\tau^n}\right|_0\tau^n. \tag{2.95}$$

同样有

$$\boldsymbol{v}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n\boldsymbol{v}}{d\tau^n}\right|_0\tau^n. \tag{2.96}$$

要使(2.95)右端收敛，必须 $|\tau|<1$，当 τ 较小时可取有限项。又

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_0=\boldsymbol{v}_0\\
&\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_0=-\left.\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right|_0=-r_0^{-3}\boldsymbol{r}_0\\
&\left.\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right|_0=3r^{-4}\left.\frac{dr}{dt}\right|_0-r^{-3}\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_0\\
&\qquad=\frac{3\boldsymbol{r}_0}{r_0^5}(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{v}_0)-\frac{\boldsymbol{v}_0}{r_0^3}\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}\right\}. \tag{2.97}$$

(2.97) 式表明在 $t=t_0$ 时 $\boldsymbol{r}$ 的任意高阶导数都可由 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}_0$ 表示，于是(2.95)式可写成如下形式：

$$\boldsymbol{r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(f_n,\boldsymbol{r})_0\tau^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(g_n,\boldsymbol{v})_0\tau^n \tag{2.98}$$

这里的 f_n，g_n 是待定的，τ^n 项的系数是 $(f_n,\boldsymbol{r})_0$ 和 $(g_n,\boldsymbol{v})_0$ 比

较(2.95)和(2.98)右端，τ 的同次幂项系数应相等，故

$$\frac{d^n \boldsymbol{r}}{d\tau^n} = f_n \boldsymbol{r} + g_n \boldsymbol{v}, \tag{2.99}$$

$$\frac{d^{n-1} \boldsymbol{r}}{d\tau^{n-1}} = f_{n-1} \boldsymbol{r} + g_{n-1} \boldsymbol{v}. \tag{2.100}$$

又

$$\begin{aligned}
\frac{d^n \boldsymbol{r}}{d\tau^n} &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d^{n-1}\boldsymbol{r}}{d\tau^{n-1}}\right) = \frac{d}{d\tau}(f_{n-1}\boldsymbol{r} + g_{n-1}\boldsymbol{v}) \\
&= \frac{df_{n-1}}{d\tau}\boldsymbol{r} + f_{n-1}\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} + \frac{dg_{n-1}}{d\tau}\boldsymbol{v} + g_{n-1}\frac{d\boldsymbol{v}}{d\tau} \\
&= \boldsymbol{r}\frac{df_{n-1}}{d\tau} + \boldsymbol{v}f_{n-1} + \frac{\boldsymbol{v}\,dg_{n-1}}{d\tau} - g_{n-1}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\
&= \left(\frac{df_{n-1}}{d\tau} - \frac{g_{n-1}}{r^3}\right)\boldsymbol{r} + \left(f_{n-1} + \frac{dg_{n-1}}{d\tau}\right)\boldsymbol{v}.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

比较(2.99)与(2.101)右端得:

$$\left.\begin{aligned}
f_n &= \frac{df_{n-1}}{d\tau} - \frac{g_{n-1}}{r^3} = \dot{f}_{n-1} - \nu g_{n-1} \\
g_n &= f_{n-1} + \frac{dg_{n-1}}{d\tau} = f_{n-1} + \dot{g}_{n-1}
\end{aligned}\right\}, \tag{2.102}$$

这里 $\nu = r^{-3}$, $\dot{f}_{n-1} = \frac{df_{n-1}}{d\tau}$, $\dot{g}_{n-1} = \frac{dg_{n-1}}{d\tau}$. (2.102)式是求 f_n, g_n 的逆推公式。由(2.99)式得:

$$f_1 = 0, \quad g_1 = 1.$$

于是从(2.102)得:

$$\left.\begin{aligned}
&f_1 = 0 && g_1 = 1 \\
&f_2 = -\nu && g_2 = 0 \\
&f_3 = 3\nu\sigma && g_3 = -\nu \\
&\vdots
\end{aligned}\right\}. \tag{2.103}$$

其中
$$\sigma = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{r^2} = \frac{\dot{r}}{r}.$$

若令
$$\left.\begin{aligned} F &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_n\tau^n = 1-\frac{\nu}{2}\tau^2+\frac{1}{2}\nu\sigma\tau^3+\cdots \\ G &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g_n\tau^n = \tau-\frac{\nu}{6}\tau^3+\frac{1}{4}\nu\sigma\tau^4+\cdots \end{aligned}\right\}, \tag{2.104}$$

则(2.98)式成为

$$\boldsymbol{r} = F\boldsymbol{r}_0 + G\boldsymbol{v}_0. \tag{2.105}$$

注意(2.105)式中的 F,G 是 $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}_0$ 的函数.

同样 $\boldsymbol{v}$ 也可以展成 τ 的幂级数,其形式是:

$$\boldsymbol{v} = F'\boldsymbol{r}_0 + G'\boldsymbol{v}_0, \tag{2.106}$$

其中
$$\left.\begin{aligned} F' &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f'_n\tau^n \\ G' &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g'_n\tau^n \end{aligned}\right\}, \tag{2.107}$$

并且从 (2.96) 和 (2.95) 式看出:

$$f'_n = f_{n+1}, \qquad g'_n = g_{n+1}. \tag{2.108}$$

§8 作用范围

一个三体系统,在讨论其中一个小天体运动时,往往可近似划分成两个二体系统,如一火箭受地球和月球引力作用,当火箭运动在地球附近时,近似地认为火箭与地球构成一个二体问题,当它与月球靠近时可认为它与月球构成一个二体问题。为了能比较合理地划分这两个二体问题的范围,提出作用范围这一概念。

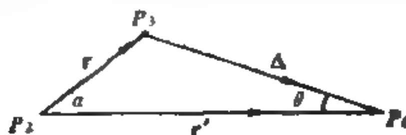


图 2-8

图 2-8 中，P_1、P_2、P_3 代表三个天体，它们的质量分别为 m_1、m_2、m_3，且满足 $m_3 \ll m_2, m_2 < m_1$。由相对运动方程 (1.12) 可得 P_3 相对 P_2 的运动方程为

$$\ddot{r} = -\frac{G(m_3 + m_2)}{r^3} r + Gm_1\left(\frac{\Delta}{\Delta^3} - \frac{r'}{r'^3}\right), \quad (2.109)$$

(2.109) 式中主星体 P_2 的引力为

$$F_2 = \frac{G(m_2 + m_3)}{r^2}, \quad (2.110)$$

摄动体 P_1 的摄动力为

$$\begin{aligned}\Delta F_1 &= Gm_1\left|\frac{\Delta}{\Delta^3} - \frac{r'}{r'^3}\right| \\ &= Gm_1\left[\left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'^2}\right)^2 - \frac{2}{r'^2\Delta^2}\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= Gm_1\frac{1}{\Delta^2}\left[1 + \left(\frac{\Delta}{r'}\right)^4 - 2\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^2\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.111)\end{aligned}$$

由图 2-8 看出

$$r\cos\alpha + \Delta\cos\theta = r',$$

故

$$\cos\theta = \frac{r'}{\Delta} - \frac{r}{\Delta}\cos\alpha,$$

代入 (2.111) 式

$$\Delta F_1 = Gm_1\frac{1}{\Delta^2}\left[1 + \left(\frac{\Delta}{r'}\right)^4 - 2\frac{\Delta}{r'}\left(1 - \frac{r}{r'}\cos\alpha\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

于是摄动力与主星体引力之比值为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2 + m_3}\left(\frac{r}{\Delta}\right)^2\Big[1 + \left(\frac{\Delta}{r'}\right)^4 \\ - 2\frac{\Delta}{r'}\left(1 - \frac{r}{r'}\cos\alpha\right)\Big]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.112)\end{aligned}$$

假如将 P_2 看作摄动体，P_1 作为主星体，那么 P_3 相对 P_1 的运动方程是：

$$\ddot{\Delta} = -\frac{G(m_1 + m_3)}{\Delta^3}\Delta + Gm_2\left(\frac{r}{r^3} - \frac{r'}{r'^3}\right),$$

这时主星体的引力为

$$F_1=\frac{G(m_1+m_3)}{\Delta^2}=\frac{G(m_1+m_3)}{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}$$

$$=\frac{G(m_1+m_3)}{r'^2}\left(1+\frac{r^2}{r'^2}-2\frac{r}{r'}\cos\alpha\right)^{-1};\tag{2.113}$$

P_2 的摄动力 ΔF 为

$$\Delta F=Gm_2\left[\left(\frac{1}{r^2}\right)^2+\left(\frac{1}{r'^2}\right)^2-2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{r'^2}\right)\cos\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{Gm_2}{r^2}\left[1+\left(\frac{r}{r'}\right)^4-2\left(\frac{r}{r'}\right)^2\cos\alpha\right]^{\frac{1}{2}},\tag{2.114}$$

此时摄动力与主星体的引力之比为

$$\frac{\Delta F_1}{F}=\frac{m_2}{m_1+m_3}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left[1-2\left(\frac{r}{r'}\right)^2\cos\alpha\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r}{r'}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-2\frac{r}{r'}\cos\alpha+\left(\frac{r}{r'}\right)^2\right].\tag{2.115}$$

凡满足 $\frac{\Delta F_1}{F_1}=\frac{\Delta F_2}{F_2}$ 时的 r 称之为较小质量天体 P_2 相对较大质量天体 P_1 的作用半径，以符号 ρ 表示之，由 ρ 划出一个包围 P_2 的区域称为作用范围。根据这一定义，由(2.115)和(2.112)式易得:

$$\left(\frac{\rho}{r'}\right)^4=\frac{m_2^2}{m_1^2}\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^4\left[1-2\left(\frac{\rho}{r'}\right)^2\cos\alpha+\left(\frac{\rho}{r'}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}\Big/$$

$$\left[1-2\frac{\Delta}{r'}\left(1-\frac{\rho}{r'}\cos\alpha\right)+\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{2.116}$$

推导(2.116)式时已忽略了小量 $\frac{m_2}{m_1}$ 和 $\frac{m_3}{m_1}$。由于 $\frac{\rho}{r'}$ 也是小量所以:

$$\frac{\Delta}{r'}=\left[1+\left(\frac{\rho}{r'}\right)^2-2\frac{\rho}{r'}\cos\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{\rho}{r'}\cos\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r'}\right)^2-\frac{\rho}{r'}\cos\alpha+\cdots\cdots,\tag{2.117}$$

则 $$\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^4=1-4\frac{\rho}{r'}\cos\alpha+2\left(\frac{\rho}{r'}\right)^2+\left(\frac{\rho}{r'}\right)^4$$

$$-4\left(\frac{\rho}{r'}\right)^3\cos\alpha+4\left(\frac{\rho}{r'}\right)^2\cos^2\alpha$$
$$+\cdots\cdots。\tag{2.118}$$

将(2.118)式代入(2.116)式，便得一个关于$\frac{\rho}{r'}$的高次方程，经过繁琐的推导得到近似的计算结果：

$$\rho=r'\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/5}(1+3\cos^2\alpha)^{-\frac{1}{10}},\tag{2.119}$$

可见作用半径ρ与r'、m_1、m_2及α有关。图 2-9 是月球对地球的

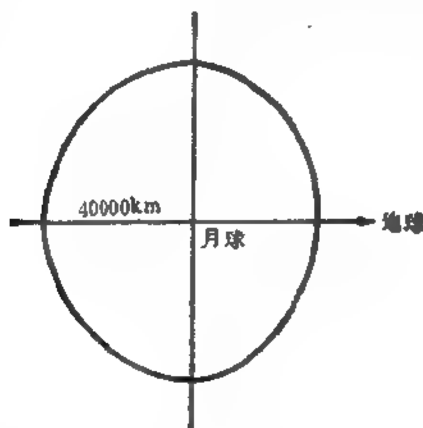


图 2-9

作用范围的平面图。作用范围只用来作近似的估算引力所及的范围，为了简化，往往只取$\alpha=0$时的ρ值作为作用范围半径，即

$$\rho=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/5}\frac{r'}{\sqrt[5]{2}},\tag{2.120}$$

这时作用范围是一个以P_2为球心的，以ρ为半径的球，称为作用球。

更简单的是直接用P_1、P_2对P_3的引力大小来定义引力范围，即在P_1、P_2之间找出一点A，图(2-10)，使在这一点的P_3受P_1和P_2的引力相等，即

$$\frac{Gm_2}{\rho^2}=\frac{Gm_1}{(r'-\rho)^2},\tag{2.121}$$

若设 $\frac{\rho}{r'}\approx 0$，则有：

$$\rho=r'\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/2}.\tag{2.122}$$

以 (2.120) 和 (2.122) 两式计算月球相对地球的引力范围的半径分别是 6.6×10^4(km) 和 4.3×10^4(km)。



图 2-10

§9 宇宙速度

人造天体(人造卫星，行星际火箭等)的运动是非常复杂的，但是，如果把地球当成一个质点，人造卫星，行星际火箭等的运动可以看成一个或几个二体问题。尽管这样处理问题是极粗略的，不过对于研究人造天体的近似运动以及估算发射人造天体的能量仍然有一定的实用价值。

第一宇宙速度，第二宇宙速度和第三宇宙速度分别是指从地面发射人造卫星，行星际火箭和恒星际火箭的最低速度。

把地球和待发射的人造天体看作一个二体系统，以 v_0 表示发射速度，v 表示人造天体进入轨道时所具有的速度，R 表示地球半径，r 表示天体进入轨道时的地心距离，那么根据能量守恒定律应有：

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\mu m\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}mv^2.\tag{2.123}$$

上式左端表示发射时刻天体具备的总能量。右端 $\mu m\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)$

表示天体由地面到进入轨道时所增加的势能，$\frac{1}{2}mv^2$ 表示天体进入轨道时所具有的动能，将活力积分：

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{2.16}$$

代入(2.123)得：

$$v_0^2 = \mu\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right). \tag{2.124}$$

可见人造天体的发射速度 v_0 取决于轨道半长径 a. 人造地球卫星的轨道半长径 $a \geqslant R$, 因此最小的发射速度是：

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} \approx 7.9(\mathrm{km/s}). \tag{2.125}$$

$M_\oplus$ 为地球质量，这一速度称为第一宇宙速度.

假如要求火箭脱离地球引力场，这时火箭轨道起码是一个抛物线，相应的发射速度为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R}} = \sqrt{2}\,v_1 \approx 11.19(\mathrm{km/s}). \tag{2.126}$$

v_2 称为第二宇宙速度.

通常称圆轨道的速度为环绕速度，称抛物线轨道的速度为脱离速度. 地球围绕太阳运动的轨道近似一个圆，所以地球(及地球上的一切物体)相对太阳都有一个环绕速度 v_e，其值为

$$v_e = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_\oplus}} \approx 30\,(\mathrm{km/s}),$$

此处 $M_\odot$ 为太阳质量，$r_\oplus$ 为日地平均距离. 从地球上发射的火箭，相对太阳的脱离速度是：

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_\oplus}} \approx 42.4\,(\mathrm{km/s}),$$

如果充分利用地球的公转速度，那么脱离太阳引力场的火箭相对地球应有的速度至少应是：

$$v' = 42.4 - 30 = 12.4(\text{km/s}),$$

以上的计算并未考虑地球对火箭的引力作用，因此 v' 是火箭刚脱离地球引力场时相对地球的速度。根据(2.121)式计算地球相对太阳的作用范围半径：

$$\rho^* = \left(\frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}}\right)^{2/5} \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \approx 9.3 \times 10^5(\text{km}), \qquad (2.127)$$

火箭由地面飞出地球引力作用范围，克服地球引力所作的功(增加的势能)是 $GM_{\oplus}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho^*}\right)$ 因此地面发射的速度 v_3 至少应该满足：

$$\frac{1}{2} v_3^2 = GM_{\oplus}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho^*}\right) + \frac{1}{2} v'^2,$$

若近似认为 $\frac{R}{\rho^*} \approx 0$ 则有

$$v_3^2 = \frac{2GM_{\oplus}}{R} + v'^2 = v_2^2 + v'^2,$$

所以

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v'^2} \approx 16.72\ (\text{km/s}). \qquad (2.128)$$

v_3 称为第三宇宙速度。

第三章　轨道计算和轨道改进

以二体问题为力学模型，根据天体的观测资料确定天体轨道的工作称为初轨计算，再通过大量的观测资料对初轨进行修正称为轨道改进。

经典的天文观测通常指光学观测，用这种手段所获得的资料是天体的球坐标，如赤道坐标 (α, δ) 或地平坐标 (A, h)。随着科学技术的进步、不少现代化的手段被应用于天文观测，譬如激光观测、雷达观测、多普勒测速和测距等。这样，我们不仅可以得到天体的球坐标，而且可以测得天体离观测者的距离和速度，也就是说可以得到天体在某一参考系中的位置和速度，从而大大简化了轨道计算工作。

§1　观测资料的处理

用于计算天体轨道的观测资料是在某一瞬时参考坐标系里取得的，因此要对这些资料进行归算，使它们相对于同一参考系。对于太阳系的天体通常都归算到某一历元的日心平赤道坐标系；对于人造地球卫星常常采用某一地心赤道坐标系。

1. 视差和光行差改正

观测某天体得到它的视位置 (α', δ')，消除视差和光行差后得到天体的真位置 (α, δ)，根据球面天文学知识，天体周日视差的改正公式是：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha - \alpha' = \frac{\rho}{\Delta}\cos\varphi'\sin(s-\alpha')\sin\delta' \\ \Delta\delta &= \delta - \delta' = -\frac{\rho}{\Delta}\left(\sin\varphi'\cos\delta - \cos\varphi'\sin\delta'\cos(s-\alpha')\right)\end{aligned}\right\},\tag{3.1}$$

上式中 ρ 为测站到地心的距离，Δ 为天体到地心的距离，它可以用激光、雷达等观测手段测得，也可以用较粗略的估计值作为近似，φ' 为观测站的地心纬度，s 为观测时的恒星时。

光行差的改正可以通过改正时间来实现．由于光速是有限的，从天体发出的光到观测站接收到需要经过一段时间，设其为 τ．若光发出的时刻为 t_0，则接收到的时刻为 $t = t_0 + \tau$，因此可根据观测者记录的时刻 t 求出 t_0:

$$t_0 = t - \tau = t - 499^{s}.004782 \times D, \tag{3.2}$$

D 是天体到观测者的距离（以天文单位计），如果不知其精确值可以用近似值代替．$499^{s}.004782$ 是光行一天文单位所需时间，称天文单位的光行时．根据产生光行差原因的分析，我们可知在 t 时刻天体的视位置等于 t_0 时刻天体的真位置．

2. 岁差和章动改正

天体的真位置 (α, δ) 经过章动改正后得到观测时刻的平位置 (α_0, δ_0)，其改正公式是：

$$\left.\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= \Delta\psi'(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta) - \Delta\varepsilon\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta \\ \delta - \delta_0 &= \Delta\psi'\sin\varepsilon\cos\alpha + \Delta\varepsilon\sin\alpha\end{aligned}\right\}, \tag{3.3}$$

其中 $\Delta\psi'$ 和 $\Delta\varepsilon$ 表示黄经章动和黄赤交角章动，其近似表达式为

$$\left.\begin{aligned}\Delta\psi' = &-(17''.2327 + 0''.01737T)\sin\Omega \\ &+ (0''.2088 + 0''.000027)\sin 2\Omega \\ &- (1''.2729 + 0''.00013T)\sin 2L + \cdots\cdots \\ \Delta\varepsilon = &-(9''.210 + 0''.00091T)\cos\Omega \\ &- (0''.0904 - 0''.00004T)\cos 2\Omega \\ &+ (0''.5522 - 0''.00029T)\cos 2L + \cdots\cdots\end{aligned}\right\}. \tag{3.4}$$

(3.4) 式中 Ω 为白道升交点黄经，自瞬时平春分点起量，L 为太阳几何平黄经，T 是由 1900 年 1 月 0.5日历书时起算的儒略世纪数．

观测时刻的平坐标 (α_0, δ_0) 经过岁差改正可得某一历元时刻的平坐标 (α_0', δ_0')，其改正公式为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0' - \alpha_0 &= (m + n\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)\Delta t \\ \delta_0' - \delta_0 &= n\cos\alpha\Delta t\end{aligned}\right\}. \tag{3.5}$$

上式中

$$\left.\begin{array}{l} m = 46''08506 + 0''027945T + 0''000127T^2 \\ n = 20''04685 - 0''008533T - 0''00037T^2 \end{array}\right\}. \qquad (3.6)$$

(3.5) 式中 Δt 表示历元时刻与观测时刻之差，T 的意义同 (3.4) 式中的 T。

§2 朗贝特方程

朗贝特 (Lambert) 定理：在主星体引力作用下，天体由位置 r_1 运动到 r_2 所需时间 t_2-t_1 仅与 r_1+r_2 以及弦长 $\sigma=|r_2-r_1|$ 和轨道半长径 a 有关。

1. 椭圆运动的朗贝特方程

对于椭圆运动朗贝特定理的数学表达式是：

$$n(t_2-t_1)=\varepsilon-\delta-(\sin\varepsilon-\sin\delta), \qquad (3.7)$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} n=\sqrt{\mu}/a\sqrt{a} \\ \sin\dfrac{\varepsilon}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{r_1+r_2+\sigma}{4a}} \\ \sin\dfrac{\delta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{r_1+r_2-\sigma}{4a}} \end{array}\right\} \qquad (3.8)$$

(3.7) 称为朗贝特方程，证明如下。

在 t_2 和 t_1 时刻相应的开普勒方程是：

$$E_2-e\sin E_2=n(t_2-\tau)$$

$$E_1-e\sin E_1=n(t_1-\tau),$$

上面两式相减得：

$$n(t_2-t_1)=E_2-E_1-2e\sin\frac{E_2-E_1}{2}\cos\frac{E_2+E_1}{2}, \qquad (3.9)$$

若令

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \\ Q &= \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \\ \cos p &= e\cos Q \end{aligned}\right\}, \tag{3.10}$$

则(3.9)成为

$$n(t_2 - t_1) = 2q - [\sin(p+q) - \sin(p-q)], \tag{3.11}$$

再令

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= p + q \\ \delta &= p - q \end{aligned}\right\}, \tag{3.12}$$

则(3.11)成为

$$n(t_2 - t_1) = \varepsilon - \delta - (\sin\varepsilon - \sin\delta).$$

我们可以进一步证明上式中的 ε , δ 与(3.8)式中所定义的是相一致的。

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= a(1 - e\cos E_1) + a(1 - e\sin E_2) \\ &= 2a\left(1 - e\cos\frac{E_1 + E_2}{2}\cos\frac{E_2 - E_1}{2}\right), \end{aligned}$$

将(3.10)代入上式得:

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos q\cos p), \tag{3.13}$$

又

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 &= a(\cos E_2 - e)\boldsymbol{P} + a\sqrt{1-e^2}\sin E_2\boldsymbol{Q} \\ &\quad - a(\cos E_1 - e)\boldsymbol{P} - a\sqrt{1-e^2}\sin E_1\boldsymbol{Q} \\ &= a(\cos E_2 - \cos E_1)\boldsymbol{P} + a\sqrt{1-e^2}(\sin E_2 - \sin E_1)\boldsymbol{Q}, \end{aligned}$$

故得:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 4a^2\sin^2 q\sin^2 p, \\ \sigma &= 2a\sin q\sin p, \end{aligned} \tag{3.14}$$

由(3.13)和(3.14)易得:

$$r_1 + r_2 \pm \sigma = 2a[1 - \cos(p \pm q)] = 4a\sin^2\frac{p \pm q}{2},$$

由(3.12)和上式得:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \pm\sqrt{\frac{r_1 + r_2 + \sigma}{4a}},$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \pm\sqrt{\frac{r_1+r_2-\sigma}{4a}},$$

由此可见(3.12)所定义 ε、δ 与(3.8)式所定义的相一致.

关于 ε、δ 的象限可由下面的准则来判定.

① 若天体两时刻的位置 r_1、r_2 在同一圈或相隔偶数圈，则 $\sin\frac{\varepsilon}{2}>0$，否则 $\sin\frac{\varepsilon}{2}<0$。

② 若弦 σ 和它对应的弧组成的弓形复盖第一焦点(主星体)则 $\sin\frac{\delta}{2}<0$，否则 $\sin\frac{\delta}{2}>0$。

③ 若上面所说的弓形复盖第二焦点则 $\cos\frac{\varepsilon}{2}<0$，否则 $\cos\frac{\varepsilon}{2}>0$。

④ 恒有 $\cos\frac{\delta}{2}>0$。

2. 抛物线运动的朗贝特方程——欧拉(Euler)方程

作抛物线运动的天体，其相应的朗贝特方程是:

$$6\sqrt{\mu}(t_2-t_1)=L^{\frac{3}{2}}\mp M^{\frac{3}{2}}, \tag{3.15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} L &= r_1+r_2+\sigma \\ M &= r_1+r_2-\sigma \end{aligned}\right\}. \tag{3.16}$$

(3.15)式的证明如下:

由抛物线的开普勒方程(2.31)得:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\mu}\;q^{-\frac{3}{2}}(t_2-t_1) &= \frac{2}{3}\left(\operatorname{tg}^3\frac{f_2}{2}-\operatorname{tg}^3\frac{f_1}{2}\right) \\ &\quad+2\left(\operatorname{tg}\frac{f_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{f_1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{f_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{f_1}{2}\right)\left[\left(\operatorname{tg}\frac{f_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{f_1}{2}\right)^2\right. \\ &\quad\left.+3\left(1+\operatorname{tg}\frac{f_1}{2}\operatorname{tg}\frac{f_2}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.17}$$

又 $$\sigma^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(f_2-f_1)$$

$$= (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2\cos^2\frac{f_2 - f_1}{2},$$

故有
$$4r_1r_2\cos^2\frac{f_2 - f_1}{2} = (r_1 + r_2)^2 - \sigma^2$$
$$= (r_1 + r_2 - \sigma)(r_1 + r_2 + \sigma)。$$

将抛物线的轨道方程(2.30)代入上式得:

$$4q^2\sec^2\frac{f_1}{2}\sec^2\frac{f_2}{2}\cos^2\frac{f_2 - f_1}{2}$$
$$= (r_1 + r_2 - \sigma)(r_1 + r_2 + \sigma) = LM,$$

即
$$2q\left(1 + \operatorname{tg}\frac{f_1}{2}\operatorname{tg}\frac{f_2}{2}\right) = \pm\sqrt{LM}. \qquad (3.18)$$

由(2.30)式还可得:

$$r_1 + r_2 = q\left(2 + \operatorname{tg}^2\frac{f_1}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{f_2}{2}\right), \qquad (3.19)$$

(3.19)—(3.18)得:

$$\operatorname{tg}\frac{f_2}{2} - \operatorname{tg}\frac{f_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{q}}[r_1 + r_2 \mp \sqrt{LM}]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2q}}[(r_1 + r_2 + \sigma)$$
$$+ (r_1 + r_2 - \sigma) \mp 2\sqrt{LM}]^{\frac{1}{2}},$$

所以
$$\operatorname{tg}\frac{f_2}{2} - \operatorname{tg}\frac{f_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2q}}(\sqrt{L} \mp \sqrt{M}). \qquad (3.20)$$

当 $0 < f_2 - f_1 < \pi$ 上式右端符号取(−),当 $\pi < f_2 - f_1 < 2\pi$ 时取(+)。

将(3.18)和(3.20)代入(3.17)得:

$$\sqrt{2\mu}\, q^{-\frac{3}{2}}(t_2 - t_1) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2q}}(\sqrt{L} \mp \sqrt{M})$$
$$\times\left[\frac{1}{2q}(\sqrt{L} \mp \sqrt{M})^2 \pm \frac{3}{2q}\sqrt{LM}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{2}\, q^{-\frac{3}{2}}}{6}(\sqrt{L^3} \mp \sqrt{M^3}),$$

即得：

$$6\sqrt{\mu}\,(t_2 - t_1) = L^{\frac{3}{2}} \mp M^{\frac{3}{2}}.$$

§3 利用天体某一时刻的位置和速度确定轨道

由活力积分(2.16)得：

$$a = \frac{r\mu}{2\mu - rv^2}. \tag{3.21}$$

此时刻的天体的角动量 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ 为已知，因此不难通过：

$$\left.\begin{aligned} &\cos i = \frac{C}{h}, \qquad && \operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} \\ &\sin \Omega = \frac{A}{h\sin i}, \qquad && \cos \Omega = -\frac{B}{h\sin i} \end{aligned}\right\}, \tag{3.22}$$

求出轨道倾角 i 和升交点角距 Ω。上式中 A、B、C 为 $\boldsymbol{h}$ 在直角坐标系中的三个分量.

由拉普拉斯积分(2.9)算得：

$$\boldsymbol{e} = -\frac{1}{\mu}\left(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{v} + \frac{\mu \boldsymbol{r}}{r}\right) = e_x\boldsymbol{i} + e_y\boldsymbol{j} + e_z\boldsymbol{k}, \tag{3.23}$$

偏心率 $e = |\boldsymbol{e}|$

由于 $\boldsymbol{e}$ 与极轴之夹角是 ω，见图 3-1. 由球面三角公式不难得：

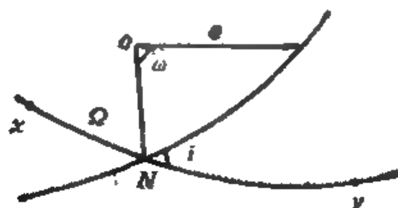


图 3-1

$$\left.\begin{aligned} e_x &= e(\cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i) \\ e_y &= e(\sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i) \\ e_z &= e\sin\omega\sin i \end{aligned}\right\}, \tag{3.24}$$

于是近日点角距ω可由:

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega &= \frac{e_x\cos\Omega + e_y\sin\Omega}{e}\\ \sin\omega &= \frac{e_z}{e\sin i}\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

计算。

将 $r = a(1 - e\cos E)$ 两端对时间求导:

$$\dot{r} = ae\sin E\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \tag{3.26}$$

将 $E - e\sin E = n(t - \tau)$ 两端对时间求导得:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{an}{r} \tag{3.27}$$

则有
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = r\dot{r} &= rae\sin E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = a^2ne\sin E\\ &= \sqrt{\mu a}\; e\sin E,\end{aligned}$$

故
$$\left.\begin{aligned}e\sin E &= \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{\mu a}}\\ e\cos E &= 1 - \frac{r}{a}\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$
又

由(3.28)可同时计算e和E，所得e值可作为对(3.23)式的验算。再应用开普勒方程求τ。

对于抛物线轨道，根数Ω、i和ω的计算公式同椭圆轨道，通过 $p = \frac{h^2}{\mu}$ 求出半通径，然后求近日点(近星点)距离 $q = \frac{p}{2}$，再通过(2.30)和(2.31)求τ。

§4 利用两个时刻的位置 r_1 和 r_2 确定轨道

1. 关于a的确定

位于 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 两点时的弦长 $\sigma=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$，此刻朗伯特方程中只有 a 值是未知的，r_1、r_2、σ 都已知，从理论上可求解 a，然而(3.7)是一超越方程，只好用逐次迭代法求解. 将(3.7)写成以下形式：

$$
\begin{aligned}
F(a)=n(t_2-t_1)&-(\varepsilon-\sin\varepsilon)\\
&+(\delta-\sin\delta)=0。
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

用牛顿迭代法解(3.29)，估计一初值 a_0，将函数 $F(a)$ 在 a_0 点作台劳展开，且只取到 Δa 项：

$$
F(a)=F(a_0)+\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a}\right)_0\Delta a=0,
$$

故
$$
\Delta a=-F(a_0)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a}\right)_0。\tag{3.30}
$$

用(3.30)求出 a 的修正值 Δa，则 $a_1=a_0+\Delta a$、然后再将 $F(a)$ 在 a_1 点作台劳展开，如此继续，直至求得符合精度要求的 a 值.

(3.30)中的 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a}$ 求法如下：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a}=(t_2-t_1)\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}a}&-(1-\cos\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}a}\\
&+(1-\cos\delta)\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}a},
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

由(3.8)

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}a}&=-\frac{3}{2}\frac{n}{a}\\
\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}a}&=-\frac{r_1+r_2+\sigma}{2a^2\sin\varepsilon}\\
\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}a}&=-\frac{r_1+r_2-\sigma}{\mathrm{d}v}
\end{aligned}
\right\},
\tag{3.32}
$$

将(3.32)代入(3.31)式得：

$$
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a}=-\frac{3}{2}\frac{n}{a}(t_2-t_1)+\frac{r_1+r_2+\sigma}{2a^2}\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}
$$

$$-\frac{r_1+r_2-\sigma}{2a^2}\mathrm{tg}\frac{\delta}{2}。\tag{3.33}$$

2. 关于 e 和 τ 的确定

$$\cos E_2=\cos(E_2-E_1+E_1)$$
$$=\cos(E_2-E_1)\cos E_1-\sin(E_2-E_1)\sin E_1$$

将 (3.10) 和 (3.12) 代入上式得:

$$\left.\begin{aligned}e\sin E_1&=[e\cos E_1\cos(\varepsilon-\delta)-e\cos E_2]/\sin(\varepsilon-\delta)\\&=\left[\left(1+\frac{r_1}{a}\right)\cos(\varepsilon-\delta)-\left(1-\frac{r_2}{a}\right)\right]\Big/\sin(\varepsilon-\delta)\\e\cos E_1&=1-\frac{r_1}{a}\end{aligned}\right\},\tag{3.34}$$

而有

$$e\sin E_2=[e\cos E_1-e\cos E_2\cos(\varepsilon-\delta)]/\sin(\varepsilon-\delta),\tag{3.35}$$

(3.34) 和 (3.35) 中的 ε、δ 可由 r_1、r_2 和已确定的 a 值求出. 从 (3.34) 解出 e 和 E_1, 从而得 M_1. 于是由 $M_1=n(t_1-\tau)$ 求出 τ, 当然某时刻的平近点角 M 也可作为代替 τ 的一轨道根数.

3. 关于 Ω、i、ω 的确定

因为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1&=a(\cos E_1-e)\boldsymbol{P}+a\sqrt{1-e^2}\sin E_1\boldsymbol{Q}\\\boldsymbol{r}_2&=a(\cos E_2-e)\boldsymbol{P}+a\sqrt{1-e^2}\sin E_2\boldsymbol{Q}\end{aligned}\right\},\tag{3.36}$$

故由(3.36)解出 $\boldsymbol{P}(P_x,P_y,P_z)$, $\boldsymbol{Q}(Q_x,Q_y,Q_z)$

进而有 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}(R_x,R_y,R_z)$.

又从球面三角公式得:

$$\left.\begin{aligned}R_x&=\sin\Omega\sin i\\R_y&=-\cos\Omega\sin i\\R_z&=\cos i\end{aligned}\right\},\tag{3.37}$$

从 (3.37) 求出轨道倾角 i 和升交点角距 Ω,

从

$$\left.\begin{aligned}P_z&=\sin\omega\sin i\\Q_z&=\cos\omega\sin i\end{aligned}\right\}\tag{3.38}$$

求出 ω。

用无线电接受器、雷达、激光等观测手段可以直接测定某些太阳系天体的位置和速度，应用上一节和本节所介绍的方法进行轨道计算，全过程很简单。下面几节将介绍用三次光学观测的资料进行轨道计算，其过程要繁琐得多。

§5 改进后的拉普拉斯方法

本节介绍的轨道计算方法，是经过许多天文学家对原拉普拉斯方法作了一些改进之后的程序，故称改进后的拉普拉斯方法。

1. 基本方程

图 3-2 中 S、E 和 P 分别代表太阳、地球和被测天体，该天体相对太阳的位置是 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 相对地球的位置是 $\boldsymbol{\rho}$，地球的日心位置是 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$。它们满足：



图 3-2

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{L}\cdots \tag{3.39}$$

$\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{\rho}$ 方向的单位向量。

假设行星三个时刻 t_i 的球面坐标是 (α_i,δ_i) $(i=1,2,3)$。那么 $\boldsymbol{L}_i(\lambda_i,\mu_i,\nu_i)$ 与 (α_i,δ_i) 的关系是：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_i&=\cos\alpha_i\cos\delta_i\\ \mu_i&=\sin\alpha_i\cos\delta_i\\ \nu_i&=\sin\delta_i\end{aligned}\right\}, \tag{3.40}$$

(3.40) 代入 (3.39) 后，得：

$$\left.\begin{aligned}\rho_i\lambda_i&=x_i-X_i\\ \rho_i\mu_i&=y_i-Y_i\\ \rho_i\nu_i&=z_i-Z_i\end{aligned}\right\}, \tag{3.41}$$

故

$$
\left.\begin{aligned}
U_i &= \frac{y_i - Y_i}{x_i - X_i} = \frac{\mu_i}{\lambda_i} = \operatorname{tg}\alpha_i \\
V_i &= \frac{z_i - Z_i}{x_i - X_i} = \frac{\nu_i}{\lambda_i} = \operatorname{tg}\delta_i \sec\alpha_i
\end{aligned}\right\}. \tag{3.42}
$$

因为 (α_i, δ_i) 由观测所得，所以 U_i、V_i 是已知值，从(3.42)可得：

$$
\left.\begin{aligned}
y_i &= U_i(x_i - X_i) + Y_i = U_i x_i - P_i \\
z_i &= V_i(x_i - X_i) + Z_i = V_i x_i - Q_i
\end{aligned}\right\}, \tag{3.43}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
P_i &= X_i U_i - Y_i \\
Q_i &= X_i V_i - Z_i
\end{aligned}\right\}. \tag{3.44}
$$

由此可见由于几何条件(3.39)的约束，(x, y, z) 三个量中只有一个是独立的。由第二章§7已讨论任意时刻天体的位置可以通过(2.105)式表示成初始时刻的位置 $\boldsymbol{r}_0$，速度 $\boldsymbol{v}_0$ 以及时间的函数。在三个时刻 t_i 中我们选择 t_2 为初始时刻，那么 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 可由 $\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 以及 $(t_1 - t_2)$、$(t_3 - t_2)$ 表出，即

$$
\boldsymbol{r}_j = F_j \boldsymbol{r}_2 + G_j \boldsymbol{v}_2 \tag{3.45}
$$

$(j = 1, 3)$ 或写成：

$$
\left.\begin{aligned}
x_j &= F_j x_2 + G_j \dot{x}_2 \\
y_j &= F_j y_2 + G_j \dot{y}_2 \\
z_j &= F_j z_2 + G_j \dot{z}_2
\end{aligned}\right\}, \tag{3.46}
$$

根据(2.104)

$$
\left.\begin{aligned}
F_j &= 1 - \frac{\nu}{2}\tau_j^2 + \frac{1}{2}\nu\tau_j^3 - \frac{1}{24}\nu(15\sigma^2 - 3\varepsilon - \sigma)\tau_j^4 + \cdots \\
G_j &= \tau_j - \frac{1}{6}\nu\tau_j^3 + \frac{1}{4}\sigma\nu\tau_j^4 + \cdots
\end{aligned}\right\}, \tag{3.47}
$$

其中，

$$
\left.\begin{aligned}
&\nu = \frac{1}{r_2^3} \qquad \sigma = \frac{\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2}{r_2^2} = \frac{\dot{r}_2}{r_2} \\
&\tau_j = t_j - t_2 \qquad (j = 1, 3) \\
&\varepsilon = r_2^{-2}(v_2^2 - r_2^{-1})
\end{aligned}\right\}, \tag{3.48}
$$

(3.43) 代入 (3.46) 第二、三式得:

$$\left.\begin{aligned} y_j &= F_j(U_2x_2 - P_2) + G_j\dot{x}_2 \\ z_j &= F_j(V_2x_2 - Q_2) + G_j\dot{z}_2 \end{aligned}\right\}. \tag{3.49}$$

反之 (3.46) 的第一式代入 (3.43) 得:

$$\left.\begin{aligned} y_j &= U_j(F_jx_2 + G_j\dot{x}_2) - P_j \\ z_j &= V_j(F_jx_2 + G_j\dot{x}_2) - Q_j \end{aligned}\right\}. \tag{3.50}$$

(3.49) 与 (3.50) 左边相等故有:

$$\left.\begin{aligned} F_j(U_2x_2 - P_2) + G_j\dot{y}_2 &= U_j(F_jx_2 + G_j\dot{x}_2) - P_j \\ F_j(V_2x_2 - Q_2) + G_j\dot{z}_2 &= V_j(F_jx_2 + G_j\dot{x}_2) - Q_j \end{aligned}\right\}. \tag{3.51}$$

(3.51) 是拉普拉斯方法(改进后的)的基本方程. 当 F_j、G_j 已知时可解出 x_2、$\dot{x}_2$、$\dot{y}_2$ 和 $\dot{z}_2$。

2. 迭代计算过程

通常 F_j、G_j 是未知的，因此只能用逐次迭代求解. 先估计一个 r_2 的初值 $r_2^{(1)}$ 在(3.47)的右端只取前两项,计算 $F_j^{(1)}$、$G_j^{(1)}$(上角标表示第一次近似), 然后由(3.51)解出 $x_2^{(1)}$、$\dot{x}_2^{(1)}$、$\dot{y}_2^{(1)}$、$\dot{z}_2^{(1)}$,通过 (3.43) 计算 $y_2^{(1)}$、$z_2^{(1)}$, 再用已算得的 $r_2^{(1)}(x_2^{(1)}, y_2^{(1)}, z_2^{(1)})$ $v_2^{(1)}(\dot{x}_2^{(1)}, \dot{y}_2^{(1)}, \dot{z}_2^{(1)})$ 算出 ν、σ, 代入(3.47)算出更精确的 $F_j^{(2)}$、$G_j^{(2)}$,重复上面的过程算出 $r_2^{(2)}$, $v_2^{(2)}$, 如此继续下去,直到在一定的精度之内两次迭代结果相同为止.

当时间间隔很短时 (τ_j 很小) 由 (3.47) 算得的 G 很小,这样由(3.51)解出的 $\dot{x}_2$、$\dot{y}_2$、$\dot{z}_2$ 的有效数字会受损失，v_2 的精度较低,故此法不常用于计算行星的轨道. 对人造卫星，相对说 τ_j 不那么小(当然也不能太大,否则求 G、F 的公式(3.47)需取很多项,甚至不收敛),因而此法用来计算人造卫星的轨道更好.

§6 改进后的高斯方法

本节介绍的高斯方法是经过后人对原高斯方法已作了改进后的程序. 高斯方法所用的观测资料与拉普拉斯方法相同，是三个时刻的 (α_i, δ_i)，(3.39) 的几何条件仍然成立. 此外由于三个时

刻的 r_i 都在轨道平面上，因而根据矢量合成，总有：

$$r_2 = C_1 r_1 + C_3 r_3, \tag{3.52}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= C_1 x_1 + C_3 x_3 \\ y_2 &= C_1 y_1 + C_3 y_3 \\ z_2 &= C_1 z_1 + C_3 z_3 \end{aligned}\right\}, \tag{3.53}$$

C_1、C_3 是待定的系数其意义和求法将在后面讨论。

1. 基本方程

将(3.43)代入(3.53)的第二、三式得：

$$\left.\begin{aligned} U_2 x_2 - P_2 &= C_1(U_1 x_1 - P_1) + C_3(U_3 x_3 - P_3) \\ V_2 x_2 - Q_2 &= C_1(V_1 x_1 - Q_1) + C_3(V_3 x_3 - Q_3) \end{aligned}\right\}. \tag{3.54}$$

从(3.43)和(3.53)又可得：

$$\left.\begin{aligned} U_2 x_2 - P_2 &= U_2(C_1 x_1 + C_3 x_3) - P_2 \\ V_2 x_2 - Q_2 &= V_2(C_1 x_1 + C_3 x_3) - Q_2 \end{aligned}\right\}, \tag{3.55}$$

(3.54)和(3.55)右端相等从而有：

$$C_1(U_1 x_1 - P_1) + C_3(U_3 x_3 - P_3) = U_2(C_1 x_1 + C_3 x_3) - P_2$$

$$C_1(V_1 x_1 - Q_1) + C_3(V_3 x_3 - Q_3) = V_2(C_1 x_1 + C_3 x_3) - Q_2.$$

经整理后有：

$$\left.\begin{aligned} C_1(U_1 - U_2)x_1 + C_3(U_3 - U_2)x_3 &= C_1 P_1 + C_3 P_3 - P_2 \\ C_1(V_1 - V_2)x_1 + C_3(V_3 - V_2)x_3 &= C_1 Q_1 + C_3 Q_3 - Q_2 \end{aligned}\right\}. \tag{3.56}$$

(3.56)式是改进后的高斯方法的基本方程，在该方程中，U、V、P、Q 等可通过 (α_i, δ_i) 和地球(或测站)位置计算得到，因此若已知 C_1、C_3，则由(3.56)可求出 x_1、x_3，作为进一步的轨道计算用。

2. C_1、C_3 的意义及计算

(3.52)式两端叉乘 r_3 得：

$$C_1 = \frac{r_2 \times r_3}{r_1 \times r_3} = \frac{|r_2 \times r_3|}{|r_1 \times r_3|} = \frac{S_{23}}{S_{13}}, \tag{3.57}$$

S_{23}、S_{13} 表示由 r_2、r_3 和 r_1、r_3 组成的三角形面积。同理(3.52)式两端叉乘 r_1 得：

$$C_3 = \frac{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|} = \frac{S_{12}}{S_{13}}, \tag{3.58}$$

可见 C_1、C_3 是两个三角形面积之比。

从 (3.45) $\quad \boldsymbol{r}_1 = F_1\boldsymbol{r}_2 + G_1\boldsymbol{v}_2,$

得: $\quad \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = -G_1(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2), \quad (3.59)$

又 $\quad \boldsymbol{r}_3 = F_3\boldsymbol{r}_2 + G_3\boldsymbol{v}_2,$

故 $\quad \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 = G_3(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2), \quad (3.60)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3 &= F_3(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) + G_3(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_2) \\ &= -G_1F_3(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2) + G_3[(F_1\boldsymbol{r}_2 + G_1\boldsymbol{v}_2) \times \boldsymbol{v}_2] \\ &= (F_1G_3 - F_3G_1)(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2),\end{aligned} \tag{3.61}$$

将(3.59)、(3.60)、(3.61) 代入 (3.57) 和 (3.58) 得计算 C_1、C_3 的公式:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{G_3}{F_1G_3 - F_3G_1} \\ C_3 &= -\frac{G_1}{F_1G_3 - F_3G_1} \end{aligned}\right\}. \tag{3.62}$$

由于 F_i、G_i 是时间间隔 τ 的幂级数,只能取有限项,因而 (3.52) 的右端也只能取有限项,将 (3.47) 代入 (3.62) 得:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\Big[1 + \frac{\nu}{6}(\tau_2^2 - \tau_3^2) \\ &\qquad + \frac{1}{4}\nu\sigma\tau_1(\tau_3^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_1^2) + \cdots\cdots\Big] \\ C_3 &= -\frac{\tau_1}{\tau_2}\Big[1 + \frac{\nu}{6}(\tau_2^2 - \tau_1^2) \\ &\qquad + \frac{1}{4}\nu\sigma\tau_3(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2) + \cdots\cdots\Big] \end{aligned}\right\}. \tag{3.63}$$

这里 ν、σ、τ_1、τ_3 的定义如(3.48)式, $\tau_2 = t_3 - t_1 = \tau_3 - \tau_1$。

3. 迭代计算过程

估计一初值 r_2,算出 ν,在(3.63)中只取到 τ^2 项,则 C_1, C_3 的近似公式是:

$$
\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 + \frac{\mu}{6}\left(\tau_2^2 - \tau_3^2\right)\right] \\
C_3 &= -\frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{\mu}{6}\left(\tau_2^2 - \tau_1^2\right)\right]
\end{aligned}\right\}。 \tag{3.64}
$$

利用(3.64)算出 C_1、C_3，代入(3.56)式求出 x_1、x_3，再通过(3.43)求出 y_1、y_3 和 z_1、z_3，并通过(3.53)得到 x_2、y_2、z_2。反复迭代几次得到在一定精度内的 $r_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$。

为提高 C_1、C_3 的精度必须在(3.63)式中取 τ 的高次幂项，因而必须求出 r_2、v_2 以便计算 σ 和 s。由于通过上面的迭代计算已求出 r_i，故可用数值微分方法求出天体的速度。

设函数 $f(x)$，在 x_0、x_1、x_2 的值分别是 $f(x_0)$、$f(x_1)$、$f(x_2)$，根据牛顿插值公式 $f(x)$ 的近似式是

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) &+ f(x_0, x_1)(x - x_0) \\
&+ f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots。
\end{aligned}
$$

上式对 x 求导：

$$
f'(x) = f(x_0, x_1) + f(x_0, x_1, x_2)[2x - (x_0 + x_1)] + \cdots \tag{3.65}
$$

这里 $f(x_0, x_1)$，$f(x_0, x_1, x_2)$ 是一阶均差，二阶均差，其定义是：

$$
\left.\begin{aligned}
f(x_0, x_1) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \\
f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&\quad + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}
\end{aligned}\right\}。 \tag{3.66}
$$

在我们目前的具体问题中，天体的位置 $r(x, y, z)$ 是时间 t 的函数，并且它们在三个时刻 t_i 的近似值 $r_i(x_i, y_i, z_i)$ 为已知。利用(3.65)、(3.66)式有：

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x(t_1, t_2) + x(t_1, t_2, t_3)[2t - (t_1 + t_2)] + \cdots \\
&= \frac{x_1}{t_1 - t_2} + \frac{x_2}{t_2 - t_1} + \left[\frac{x_1}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + \frac{x_3}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}\right] \\
&\quad \times [2t - (t_1 + t_2)]
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$\dot{y}$、$\dot{z}$的公式与上式类似。这样就可求出 $v(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$，在(3.67)中令 $t = t_2$ 即得 $v_2(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$，然后可利用(3.48)求出 σ、ε，代入(3.63)式便得到更精确的 C_1、C_3。重复前面的迭代过程求出更精确的 r_2。根据 r_2、v_2 应用本章§3所阐述的方法计算天体的轨道根数。

前一节介绍的拉普拉斯方法和本节所述的高斯方法都用到 F 和 G，它们是 τ 的幂级数，在时间间隔较大时收敛性很差，必然影响计算精度，因而这两种方法用于短弧段定轨较好。此外要注意的是如果由观测资料计算得到的 $(U_1 - U_2)$、$(V_1 - V_2)$、$(U_3 - U_2)$、$(V_3 - V_2)$ 等是小量由(3.56)解 x_1、x_3 的精度便降低(有效数字损失)甚至无法计算，这时可考虑将基本方程形式作适当改变。

§7 已知 a 值的巴日诺夫 (Баженов) 方法

对于人造卫星来说，通过精确地测定卫星过某一纬圈的时刻进而定出卫星的运行周期和轨道半长径 a 是不困难的。本节将介绍一种已知 a 值的巴日诺夫定轨法，这是人造卫星轨道计算的常用方法之一，它与前面两节中所介绍的方法相比较，其明显的优点是避免了求 F 和 G，因而不受观测弧段长短的限止，事实上弧段太短必然影响定轨的精度。

1. 基本方程

将轨道平面方程 (2.6) 写成：

$$gx + hy + z = 0, \tag{3.68}$$

其中 g、h 是轨道根数 i、Ω 的函数：

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{A}{C} = \sin\Omega\tan i \\ h &= \frac{B}{C} = -\cos\Omega\tan i \end{aligned}\right\}。\tag{3.69}$$

(注意：这里的 A、B、C 是角动量的三个分量，而 h 不代表角动量。)

若令
$$\boldsymbol{n}_0 = g\boldsymbol{i} + h\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\tag{3.70}$$
则有
$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r} = 0。\tag{3.71}$$
从 (3.39) 式有：

$$\begin{aligned} \rho_i &= \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_i}{\boldsymbol{L}_i} = \frac{\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_i)}{\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{L}_i} = -\frac{\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{R}_i}{\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{L}_i} \\ &= -\frac{X_i g + Y_i h + Z_i}{\lambda_i g + \mu_i h + \nu_i}。\end{aligned}\tag{3.72}$$

卫星作椭圆运动时三次观测中的任意两次都可组成一个朗贝特方程：

$$f_i(a, \varepsilon_i, \delta_i) = n\tau_i - (\varepsilon_i - \sin\varepsilon_i) + (\delta_i - \sin\delta_i) = 0,\tag{3.73}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\tau_i = t_k - t_j, \qquad \sin\frac{\varepsilon_i}{2} = \pm\sqrt{\frac{r_j + r_k + \sigma_i}{4a}}, \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\ \sin\frac{\delta_i}{2} = \pm\sqrt{\frac{r_j + r_k - \sigma_i}{4a}} \\ &\sigma_i = |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j| \end{aligned}\right\}。\tag{3.74}$$

下标 i、j、$k = 1$、2、3，但 $i \neq j \neq k$，$k > j$

$f_i(a, \varepsilon_i, \delta_i)$ 表示 a、ε_i、δ_i 的一个函数，其值为零。从表面看 (3.73) 有三个方程，但只有两个是独立的，其中任意一个可由其他两个推出。$\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{L}_i$ 是已知值，(3.72) 和 (3.73) 联立是含有五个未知量 h、g、ρ_i 的五个方程，从理论上说可求出 ρ_i、g、h，但这一方程组是极复杂的超越方程，我们用微分改进原理逐次迭代求解

h和g。当a为已知时 $f_i(a, \varepsilon_i, \delta_i)$ 看作是ε_i、δ_i的函数，因而是r_i(或ρ_i)的函数，由(3.72)看出它是h、g的函数，所以记作$f_i(g, h)$。估计一个初值(g_0, h_0)将$f_i(g, h)$在(g_0, h_0)作台劳展开得：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial f_1}{\partial g}\right)_0 \Delta g + \left(\frac{\partial f_1}{\partial h}\right)_0 \Delta h = -f_1(g_0, h_0)\\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial g}\right)_0 \Delta g + \left(\frac{\partial f_2}{\partial h}\right)_0 \Delta h = -f_2(g_0, h_0)\end{aligned}\right\}。\tag{3.75}$$

(3.75)式是已知a值的巴日诺夫方法的基本方程，只要能求出$\left(\frac{\partial f_i}{\partial g}\right)$、$\left(\frac{\partial f_i}{\partial h}\right)$，通过(3.75)解出$\Delta g$、$\Delta h$就能不断修正$g$、$h$。

2. 关于$\frac{\partial f}{\partial g}$、$\frac{\partial f}{\partial h}$的计算

将(4.63)式对g和h求偏导得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial g} = (1-\cos\delta_i)\frac{\partial \delta_i}{\partial g} - (1-\cos\varepsilon_i)\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial g}\\ \frac{\partial f_i}{\partial h} = (1-\cos\delta_i)\frac{\partial \delta_i}{\partial h} - (1-\cos\varepsilon_i)\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial h}\end{aligned}\right\}，\tag{3.76}$$

又从(3.74)得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial g} = \frac{1}{2a\sin\varepsilon_i}\left(\frac{\partial r_j}{\partial g} + \frac{\partial r_k}{\partial g} + \frac{\partial \sigma_i}{\partial g}\right)\\ \frac{\partial \delta_i}{\partial g} = \frac{1}{2a\sin\delta_i}\left(\frac{\partial r_j}{\partial g} + \frac{\partial r_k}{\partial g} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial g}\right)\\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial h} = \frac{1}{2a\sin\varepsilon_i}\left(\frac{\partial r_j}{\partial h} + \frac{\partial r_k}{\partial h} + \frac{\partial \sigma_i}{\partial h}\right)\\ \frac{\partial \delta_i}{\partial h} = \frac{1}{2a\sin\delta_i}\left(\frac{\partial r_j}{\partial h} + \frac{\partial r_k}{\partial h} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial h}\right)\end{aligned}\right\}，\tag{3.77}$$

并且

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial g} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial g} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\partial(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{L})}{\partial g} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}}{r}\frac{\partial \rho}{\partial g}\\ \frac{\partial r}{\partial h} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial h} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\partial(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{L})}{\partial h} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}}{r}\frac{\partial \rho}{\partial h}\end{aligned}\right\}。\tag{3.78}$$

从(3.72)有：

$$\frac{\partial \rho}{\partial g} = -\left(\frac{R}{L\cdot n_0}\cdot\frac{\partial n_0}{\partial g} - \frac{R\cdot n_0}{(L\cdot n)^2}\cdot L\cdot\frac{\partial n_0}{\partial g}\right)$$

$$= -\frac{1}{L\cdot n_0}\left(R - \frac{R\cdot n_0}{L\cdot n_0}\cdot L\right)\frac{\partial n_0}{\partial g}$$

$$= -\frac{r}{L\cdot n_0}\cdot\frac{\partial n_0}{\partial g},$$

所以
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial g} &= -\frac{x}{L\cdot n_0},\\ \frac{\partial \rho}{\partial h} &= -\frac{y}{L\cdot n_0}.\end{aligned}\right\} \tag{3.79}$$
同理

(3.79)式代入(4.78)式得:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial g} &= -\frac{r\cdot L}{r}\frac{x}{L\cdot n_0}\\ \frac{\partial r}{\partial h} &= -\frac{r\cdot L}{r}\frac{y}{L\cdot n_0}\end{aligned}\right\}. \tag{3.80}$$

从 $\sigma_i^2 = \sigma_i^2 = |r_k - r_j|^2$ 得:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial g} = \frac{\sigma_i}{\sigma_i}\left(\frac{\partial r_k}{\partial g} - \frac{\partial r_j}{\partial g}\right) = \frac{\sigma_i}{\sigma_i}\left(L_k\frac{\partial \rho_k}{\partial g} - L_j\frac{\partial \rho_j}{\partial g}\right),$$

将(3.79)式代入上式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_i}{\partial g} &= \frac{\sigma_i}{\sigma_i}\left(L_j\frac{x_j}{L_j\cdot n_0} - L_k\frac{x_k}{L_k\cdot n_0}\right)\\ \frac{\partial \sigma}{\partial h} &= \frac{\sigma_i}{\sigma_i}\left(L_j\frac{y_j}{L_j\cdot n_0} - L_k\frac{y_k}{L_k\cdot n_0}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{3.81}$$

将(3.80)、(3.81)式代入(3.77)式,然后再代入(3.76)式,最后得:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial g} &= (U_iA_j - V_iB_{ii})\frac{x_j}{L\cdot n_0}\\ &\quad + (U_iA_k - V_iB_{ii})\frac{x_k}{L_k\cdot n_0}\\ \frac{\partial f_i}{\partial h} &= (U_iA_j - V_iB_{ii})\frac{y_j}{L\cdot n_0}\\ &\quad + (U_iA_k - V_iB_{ii})\frac{y_k}{L_k\cdot n_0}\end{aligned}\right\}. \tag{3.82}$$

其中

$$\left.\begin{array}{ll} M_i = \dfrac{1}{2a}\tan\dfrac{\varepsilon_i}{2} & N_i = \dfrac{1}{2a}\tan\dfrac{\delta_i}{2} \\ U_i = M_i - N_i & V_i = M_i + N_i \\ A_j = \dfrac{\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{L}_j}{r_i} & A_k = \dfrac{\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{L}_k}{r_k} \\ B_{ij} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{L}_j}{\sigma_i} & B_{ik} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{L}_k}{\sigma_i} \end{array}\right\}. \tag{3.83}$$

3. 迭代计算 g、h 的过程

首先估计一个初值 g_0、h_0，通过(3.70)式得到 n_0，由(3.72)求出 ρ_i，从而得到 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_i$，于是从(3.74)式可计算 ε_i、δ_i，再由(3.83)式计算 U_i、V_i、A_j、A_k、B_{ij}、B_{ik} 等，它们代入(3.82)算出 $\dfrac{\partial f}{\partial g}$、$\dfrac{\partial f}{\partial h}$，再解方程(3.75)得到 Δg、Δh，修正 g、h 的初值，重复进行直到求出精确的 h、g。

4. 关于轨道根数的求出

从上面的迭代计算过程中我们已算出 $\boldsymbol{r}_i$，因此可以用§4的方法确定轨道，也可以直接利用前面算出的 g、h 代入(3.69)式求出根数 i、Ω。此外

因为
$$\begin{aligned} e\cos E_3 &= e\cos[E_1 - (E_1 - E_3)] \\ &= e\cos E_1 \cos(E_1 - E_3) \\ &\quad + e\sin E_1 \sin(E_1 - E_3), \end{aligned}$$

所以
$$\left.\begin{aligned} e\sin E_1 &= \frac{\left(1 - \dfrac{r_1}{a}\right)\cos(\varepsilon_2 - \delta_2) - \left(1 - \dfrac{r_3}{a}\right)}{\sin(\varepsilon_2 - \delta_2)} \\ e\cos E_1 &= 1 - \frac{r_1}{a} \end{aligned}\right\}. \tag{3.84}$$

由(3.84)得 e、E_1，从而求出 t_1 时刻的平近点 M_1 和真近点角 f_1。从图(3-3)看出：

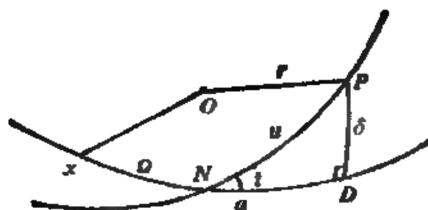


图 3-3

$$
\left.\begin{aligned}
r_1 \sin u_1 &= r_1 \sin \delta_1 / \sin i \\
&= z_1 / \sin i \\
r_1 \cos u_1 &= r_1 \cos(\alpha_1 - \Omega) \cos \delta_1 \\
&= x_1 \cos \Omega + y_1 \sin \Omega
\end{aligned}\right\}。 \tag{3.85}
$$

从(3.85)解得 u_1，则 $\omega = u_1 - f_1$。

§8 抛物线轨道计算——奥尔贝斯(Olbers)方法

多数彗星的轨道接近抛物线，本节介绍的奥尔贝斯方法可用于确定彗星轨道。

1. 奥尔贝斯方程

抛物线运动应满足欧拉方程(3.15)。取适当的时间单位使 $\mu = 1$，则对于 t_1、t_3 时刻的 r_1、r_3 构成的欧拉方程是

$$
6\tau_2 = (r_1 + r_3)^{3/2}\left[\left(1 + \frac{\sigma}{r_1 + r_3}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{\sigma}{r_1 + r_3}\right)^{3/2}\right]
$$

其中 $\tau_2 = t_3 - t_1$，当 τ 很小时 $\xi = \dfrac{\sigma}{r_1 + r_3}$ 是小量，上式中 $(1+\xi)^{3/2}$ 和 $(1-\xi)^{3/2}$ 用二项式公式展开，于是有：

$$
6\tau_2 = (r_1 + r_2)^{3/2}\left[3\xi - \frac{3}{4.6}\xi^3 - \frac{3\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\xi^5 \cdots\cdots\right]。 \tag{3.86}
$$

令 $\eta = \dfrac{2\tau_2}{(r_1 + r_3)^{3/2}}$ 则由(3.86)得：

$$\eta = \xi - \frac{1}{4 \cdot 6}\xi^3 - \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}\xi^5 - \cdots\cdots, \quad (3.87)$$

(3.87) 式表明 η 可用 ξ 的幂级数表示，反之 ξ 也可用 η 的幂级数表示，假定形式是：

$$\xi = a_1\eta + a_3\eta^3 + a_5\eta^5 + \cdots\cdots, \quad (3.88)$$

将 (3.88) 代入 (3.87) 右端，比较两边 η 同次幂系数即可确定 a_1、a_3、$a_5 \cdots$ 等，其结果是：

$$\left.\begin{array}{llll} a_1 = 1, & a_3 = \dfrac{1}{24}, & a_5 = \dfrac{5}{384} & \\ a_7 = \dfrac{59}{9216} & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\}. \quad (3.89)$$

故有

$$\xi = \eta + \frac{1}{24}\eta^3 + \frac{5}{384}\eta^5 + \frac{59}{9216}\eta^7 + \cdots\cdots, \quad (3.90)$$

假如 η 已知，由(3.90)求出 ξ，则 r_1、r_3 之间的弦长为

$$\sigma_d = (r_1 + r_3)\xi = (r_1 + r_3)\left(\eta + \frac{1}{24}\eta^3 + \frac{5}{384}\eta^5 + \cdots\cdots\right), \quad (3.91)$$

σ_d 的下标 d 表示由力学条件——朗贝特方程得到的弦长。

此外，对于抛物线轨道，三次观测值仍应满足几何条件 (3.39) 式和 (3.52) 式，因而和 §6 节所介绍的高斯方法一样 (r_2, r_3) 和 (r_1, r_2) 组成的三角形面积与 (r_1, r_3) 组成的三角形面积之比值 C_1、C_3，为

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_1(\tau_3^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_1^2)}{r_2^4}\frac{dr_2}{dt} + \cdots\right] \\ C_3 &= -\frac{\tau_1}{\tau_3}\left[1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_3(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)}{r_2^4}\frac{dr_2}{dt} + \cdots\right] \end{aligned}\right\}. \quad (3.92)$$

假定三次观测的时间间隔较短，r 基本呈线性变化，$\frac{d^2r}{dt^2}$ 可忽略，则有：

$$\left.\begin{aligned} r_1 &\approx r_2 + \frac{dr_2}{dt}(t_1 - t_2) = r_2 + \tau_1 \frac{dr_2}{dt} \\ r_3 &\approx r_2 + \frac{dr_2}{dt}(t_3 - t_2) = r_2 + \tau_3 \frac{dr_2}{dt} \end{aligned}\right\}, \tag{3.93}$$

由(3.93)解出:

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{r_3 - r_1}{\tau_3 - \tau_1} = \frac{r_3 - r_1}{\tau_2}, \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{2}(r_1 + r_3) - \frac{\tau_1 + \tau_3}{2}\frac{dr_2}{dt} \\ &= \frac{1}{2}(r_1 + r_3)\left[1 - \frac{\tau_1 + \tau_3}{\tau_2}\frac{r_3 - r_1}{r_1 + r_3}\right], \end{aligned} \tag{3.95}$$

将(3.94)式和(3.95)式代入(3.92)式，则有:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3} - \frac{4\tau_1(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_3)}{\tau_2} \right. \\ &\qquad \left. \times \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\cdots \right] \\ C_3 &= -\frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{(r_1 + r_3)^2} - \frac{4\tau_1(\tau_1\tau_2 + \tau_3\tau_2 - \tau_3^2)}{\tau_2} \right. \\ &\qquad \left. \times \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\cdots \right] \end{aligned}\right\}. \tag{3.96}$$

由于 τ 和 $\dfrac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4}$ 都为小量，故上式右边第三项可忽略，则

$$\frac{C_1}{C_3} \approx -\frac{\tau_3}{\tau_1} - \frac{4}{3}\frac{\tau_3(\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)}{\tau_1}\frac{1}{(r_1 + r_3)^3}. \tag{3.97}$$

如果近似地认为 t_2 是 t_1 和 t_3 之中间时刻，则 $\tau_1 + \tau_3 = 0$，所以有:

$$\frac{C_1}{C_3} = -\frac{\tau_3}{\tau_1}. \tag{3.98}$$

令 $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$ 表示太阳的地心位置，(3.39)式应为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{R}$ 代入(3.52)得:

$$\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{R}_2 = C_1(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{R}_1) + C_3(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{R}_3),$$

即 $$C_1\rho_1\boldsymbol{L}_1 - \rho_2\boldsymbol{L}_2 + C_3\rho_3\boldsymbol{L}_3 = C_1\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2 + C_3\boldsymbol{R}_3. \tag{3.99}$$

定义一个单位矢量 $\boldsymbol{P}(a, b, c)$，使 $\boldsymbol{P}$ 垂直 $\boldsymbol{L}_2$ 和 $\boldsymbol{R}_2$，满足 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{R}_2$，则

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{L}_2 &= a\lambda_2 + b\mu_2 + c\nu_2 = 0 \\ \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_2 &= aX_2 + bY_2 + cZ_2 = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{3.100}$$

从(3.100)式解得:

$$a:b:c = (\mu_2 Z_2 - \nu_2 Y_2):(\nu_2 X_2 - \lambda_2 Z_2):(\lambda_2 Y_2 - \mu_2 X_2),$$

可取
$$\left.\begin{aligned} a &= \mu_2 Z_2 - \nu_2 Y_2 \\ b &= \nu_2 X_2 - \lambda_2 Z_2 \\ c &= \lambda_2 Y_2 - \mu_2 X_2 \end{aligned}\right\}, \tag{3.101}$$

将(3.99)两边点乘 $\boldsymbol{P}$，并利用(3.100)的结果得:

$$C_1\rho_1\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{P} + C_3\rho_3\boldsymbol{L}_3\cdot\boldsymbol{P} = C_1\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_1 + C_3\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_3.$$

令:

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{L}_i \\ B_i &= \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_i \qquad (i = 1, 3) \end{aligned}\right\}, \tag{3.102}$$

则 $$C_1\rho_1 A_1 + C_3\rho_3 A_3 = C_1 B_1 + C_3 B_3. \tag{3.103}$$

从而得 ρ_3 与 ρ_1 的关系式:

$$\rho_3 = M\rho_1 + m \tag{3.104}$$

其中
$$\left.\begin{aligned} M &= -\frac{C_1}{C_3}\frac{A_1}{A_3} \\ m &= \frac{1}{A_3}\left(\frac{C_1}{C_3}B_1 + B_3\right) \end{aligned}\right\}. \tag{3.105}$$

(3.104)式称为奥尔贝斯方程，m 是小量，因为

$$m = \frac{B_1}{A_3}\left(\frac{C_1}{C_3} + \frac{B_3}{B_1}\right),$$

而
$$\frac{B_3}{B_1} = \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_3}{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{R}_1} = \frac{(\boldsymbol{L}_2\times\boldsymbol{R}_2)\cdot\boldsymbol{R}_3}{(\boldsymbol{L}_2\times\boldsymbol{R}_2)\cdot\boldsymbol{R}_1}$$
$$= -\frac{\boldsymbol{R}_2\times\boldsymbol{R}_3}{\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2} = -\frac{N_{23}}{N_{12}}.$$

$\frac{N_{23}}{N_{12}}$ 是地球在运动过程中 $\boldsymbol{R}_2$、$\boldsymbol{R}_3$ 组成的三角形面积与 $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$

组成的三角形面积之比，因此在第一次近似计算中可令 $\frac{N_{23}}{N_{12}}=\frac{\tau_3}{\tau_1}=\frac{C_1}{C_3}$，这样 m 近似为零，于是在第一次近似中取：

$$\rho_1 = M\rho_3 \tag{3.106}$$

2. r_1、r_3 的迭代计算

首先取一个 ρ_1 的初值，并且认为 $m=0$，通过 (3.106) 算出 ρ_3，进而求出 r_1、r_3 和弦长 $\sigma_g=|r_3-r_1|$ 这里下脚标 g 表示用几何方法得到的。另一方面利用现有的 r_1、r_3 计算 η，并通过 (3.90)式算出 ξ（或查 η-ξ 的表）。进而通过 (3.91)式求 r_1、r_3 组成的弦长 σ_d。如果 ρ_1、ρ_3 是精确的（r_1、r_3 也是精确的）那么由力学条件求出的弦长应与几何条件求出的弦长相等，即 $\sigma_d=\sigma_g$，实际上因为初值 ρ_1 不精确，$\sigma_d\neq\sigma_g$。为了得到较精确的 ρ_1，我们可以估计几个不同的 ρ_1 值，算出几组 $\Delta\sigma=\sigma_d-\sigma_g$，然后用线性内插法反求出一个使 $\Delta\sigma=0$ 的 ρ_1 值作为精确值，再如前面所说的求出 r_1、r_3，用它们来计算抛物线的第一次近似的轨道根数。

如果 t_3-t_2 与 t_2-t_1 几乎相等，那么用第一次近似的结果 r_1、r_3 算得的轨道根数已足够精确。如若不能达到精度标准，可用第一次近似得到的 r_1、r_3、ρ_1，ρ_2、ρ_3 作光行差修正得 τ_i，并通过 (3.97) 式改进 $\frac{C_1}{C_3}$，再通过 (3.105) 式计算 M、m，重复前面的迭代过程求出第二次近似的 r_1、r_3，一般说用第二次近似结果计算轨道根数已足精确。

需要说明的是如果由(3.103)式计算的 A_3 是小量（$\boldsymbol{L}_2$ 与 $\boldsymbol{P}$ 接近垂直，$\boldsymbol{R}_2$、$\boldsymbol{L}_2$、$\boldsymbol{L}_3$ 共面），(3.105)出现小分母，影响 m 的精度，这时，奥尔贝斯方程可作适当改变，譬如使定义的辅助量 $\boldsymbol{P}$ 垂直 $\boldsymbol{L}_1$，从而得到 ρ_3 与 ρ_2 的关系，这样相应的方程 (3.105) 不再有小分母。

§9 轨道改进

由于摄动的影响,天体的真实轨道是随时间变化的,这变化可概括成长期变化和周期变化。习惯上用 σ 代表轨道根数。任意时刻的根数 $\sigma(t)$ 应是:

$$\sigma(t)=\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)}t+\sigma^{(2)}t^{2}+\sigma^{(r)}+\cdots, \qquad (3.107)$$

(3.107)式中 $\sigma^{(0)}$ 代表初始时刻的根数,由初轨计算得到,$\sigma^{(1)}$、$\sigma^{(2)}$ 和 $\sigma^{(r)}$ 代表长期变化项系数和周期变化项,原则上这些系数可根据摄动理论计算得到。用(3.107)式预推的根数是不精确的。首先因为用来计算初轨的观测资料不精确,而且计算初轨时也未考虑摄动影响。其次由于摄动因素考虑不周全以及摄动计算的误差使得 $\sigma^{(1)}$、$\sigma^{(2)}$ 等也不精确。根数 σ 的误差是:

$$\Delta\sigma(t)=\Delta\sigma^{(0)}+\Delta\sigma^{(1)}t+\Delta\sigma^{(2)}t^{2}+\cdots, \qquad (3.108)$$

需要用大量的观测资料对轨道进行改进。

1. 微分改进原理

当某天体的轨道根数是已知时,可由理论计算出任意时刻的赤经、赤纬,记作 α_c、δ_c(计算值或星表值)。通过观测也可得到这一时刻的赤经,赤纬 $(\alpha_0\ \delta_0)$。$(\alpha_c\ \delta_c)$ 与 $(\alpha_0\ \delta_0)$ 之间有残差 $\Delta\alpha=\alpha_0-\alpha_c$,$\Delta\delta=\delta_0-\delta_c$。分析产生残差的原因有以下几方面:

①轨道根数的误差引起的,记作 $(\Delta\alpha)_p$,$(\Delta\delta)_p$。

②如果对象是太阳系的行星,小行星,观测在地球上进行,地球轨道根数的误差也将造成残差,记作 $(\Delta\alpha)_E$、$(\Delta\delta)_E$。

③星表值是相对某一参考系(如 FK_4)的,那么总的残差中应包含该参考系的零点误差记作 $\Delta\alpha_0$、$\Delta\delta_0$。

④某些天文常数的误差造成 α、δ 的误差。

⑤观测本身有系统误差和偶然误差。不过系统误差可改进,偶然误差可通过大量的观测来消除。

如果忽略④、⑤两方面原因。则有

$$\Delta\alpha=\Delta\alpha_0+(\Delta\alpha)_p+(\Delta\alpha)_E$$

$$\Delta\delta = \Delta\delta_0 + (\Delta\delta)_p + (\Delta\delta)_E$$

忽略 $\Delta\sigma$ 平方项和高次项：

$$(\Delta\alpha)_p = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_j} \Delta\sigma_j,$$

$$(\Delta\delta)_p = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial\delta}{\partial\sigma_j} \Delta\sigma_j,$$

对于 $(\Delta\alpha)_E$ $(\Delta\delta)_E$ 形式相同。所以

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha = \Delta\alpha_0 + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_j}\Delta\sigma_j + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma'_j} \Delta\sigma'_j \\ \Delta\delta = \Delta\delta_0 + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial\delta}{\partial\sigma_j}\Delta\sigma_j + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\delta}{\partial\sigma'_j}\Delta\sigma'_j \end{aligned}\right\}, \qquad (3.109)$$

其中 σ' 代表地球的轨道根数，$\Delta\alpha$、$\Delta\delta$ 是已知值 $\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma}$、$\frac{\partial\delta}{\partial\sigma}$ 等可通过天体力学的有关公式求出，从(3.109)式用最小二乘法可求出轨道根数的改正值和参考坐标系的零点改正。为讲清原理，将(3.109)式简化为

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_j} \Delta\sigma_j \\ \Delta\delta = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial\delta}{\partial\sigma_j} \Delta\sigma_j \end{aligned}\right\}. \qquad (3.110)$$

根据最小二乘原理，天体的观测值与计算值拟合得最好的条件是：

$$\sum_i (\cos^2\delta_i\Delta\alpha_i^2 + \Delta\delta_i^2) = \text{最小}.$$

于是将(3.110)式改写成：

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\Delta\alpha = \cos\delta \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_i} \Delta\sigma_i \\ \Delta\delta = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial\delta}{\partial\sigma_i} \Delta\sigma_i \end{aligned}\right\}. \qquad (3.111)$$

假如有 n 次观测，每次观测得到一组 $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$ 于是可例出 $2n$ 个

条件方程:

$$
\begin{pmatrix}
\Delta\delta_1 \\
\Delta\delta_2 \\
\vdots \\
\Delta\delta_n \\
\cos\delta_1\Delta\alpha_1 \\
\cos\delta_2\Delta\alpha_2 \\
\vdots \\
\cos\delta_n\Delta\alpha_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{\partial\delta_1}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial\delta_1}{\partial\sigma_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial\delta_1}{\partial\sigma_6} \\
\frac{\partial\delta_2}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial\delta_2}{\partial\sigma_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial\delta_2}{\partial\sigma_6} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial\delta_n}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial\delta_n}{\partial\sigma_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial\delta_n}{\partial\sigma_6} \\
\cos\delta_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial\sigma_1} & \cos\delta_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial\sigma_2} & \cdots\cdots & \cos\delta_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial\sigma_6} \\
\cos\delta_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\sigma_1} & \cos\delta_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\sigma_2} & \cdots\cdots & \cos\delta_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\sigma_6} \\
\vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\
\cos\delta_n\frac{\partial\alpha_n}{\partial\sigma_1} & \cos\delta_n\frac{\partial\alpha_n}{\partial\sigma_2} & & \cos\delta_n\frac{\partial\alpha_n}{\partial\sigma_6}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\Delta\sigma_1 \\
\Delta\sigma_2 \\
\vdots \\
\Delta\sigma_6
\end{pmatrix}.
\tag{3.112}
$$

天体的赤经 α 和赤纬 δ 与轨道根数的函数关系很复杂，故直接求偏导 $\frac{\partial\delta}{\partial\sigma}$、$\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma}$ 难以实现，可用直角坐标的残差 $\Delta\boldsymbol{r}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 与 $\Delta\sigma$ 的关系 $\Delta\boldsymbol{r}=\sum\limits_{j=1}^{6}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\sigma_j}\Delta\sigma_j$ 作为过渡。

2. $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\sigma}$ 的求出

以 a、$e(e=\sin\varphi)$、i、Ω、ω、$M_0=n(t_0-\tau)$ 作为六个轨道根数:

① $\boldsymbol{r}$ 对根数 a 的偏导:

$$
\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial a}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial a}\right)+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial a}. \tag{3.113}
$$

其中 $\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial a}\right)$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 中显含 a 的部分对 a 求偏导，根据(2.37)式

$$
\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial a}\right)=\frac{\boldsymbol{r}}{a},
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial a} &= \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial a} \\
&= -\frac{3}{2}\frac{1}{a}t\dot{\boldsymbol{r}}.
\end{aligned}
$$

将上面两式代入(3.113)得：

$$\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{1}{a}\left(r-\frac{3}{2}t\dot{r}\right)。\tag{3.114}$$

② r 对 e（或 φ）的偏导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial \varphi}&=\frac{\partial r}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial \varphi}=\cos\varphi\,\frac{\partial r}{\partial e}\\&=\cos\varphi\left[\left(\frac{\partial r}{\partial e}\right)+\frac{\partial r}{\partial E}\cdot\frac{\partial E}{\partial e}\right],\end{aligned}\tag{3.115}$$

由(2.37)

$$\left(\frac{\partial r}{\partial e}\right)=-aP-\frac{ae\sin E}{\sqrt{1-e^2}}Q,$$

$$\frac{\partial r}{\partial E}=-a\sin EP+a\sqrt{1-e^2}\cos EQ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial e}=\frac{a\sin E}{r},$$

以上三式代入(3.115)得：

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}=\cos\varphi\left[-aP-\frac{ae\sin E}{\sqrt{1-e^2}}Q+\frac{\dot{r}}{n}\sin E\right]。\tag{3.116}$$

从(2.37)、(2.38)两式我们可得：

$$\left.\begin{aligned}P&=\frac{\cos E}{r}r-\frac{\sin E}{na}\dot{r}\\Q&=\frac{\sin E}{r\sqrt{1-e^2}}r+\frac{\cos E-e}{na\sqrt{1-e^2}}\dot{r}\end{aligned}\right\}。\tag{3.117}$$

将(3.117)式代入(3.116)式，并经整理得：

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}=Hr+K\dot{r},\tag{3.118}$$

其中

$$H=-\frac{\cos E+e}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$K = \frac{\sin E}{n\sqrt{1-e^2}}(2 - e^2 - e\cos E),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial e} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial e} = \frac{1}{\cos\varphi}(H\boldsymbol{r} + K\dot{\boldsymbol{r}}). \qquad (3.119)$$

$\boldsymbol{r}$ 对 M_0 的偏导很易求出，因 $M = n(t - t_0) + M_0$ 所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial M_0} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial M} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{n}. \qquad (3.120)$$

③ $\boldsymbol{r}$ 对根数 i、Ω、ω 的偏导

根数 i、Ω 和ω 的变化可看作轨道在空间的转动。假定轨道绕空中某一瞬时轴旋转 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 角（注意这里的角度是一矢量，即 $\Delta\boldsymbol{\phi} = \Delta\phi\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}$ 是垂直 $\Delta\phi$ 的一单位向量，$\Delta\phi$ 以逆时针为正)那么天体的位置变化 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r} = \Delta\phi\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r},$$

故
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\phi} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r}. \qquad (3.121)$$

若 $\boldsymbol{h}_0$、$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别表示轨道平面的法线方向，升交点方向和 z 轴方向的单位向量，即

$$\boldsymbol{h}_0 = \begin{pmatrix} \sin\Omega \sin i \\ -\cos\Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \cos\Omega \\ \sin\Omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

根据 (3.121) 易求出：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} z\sin\Omega \\ z\cos\Omega \\ y\cos\Omega - x\sin\Omega \end{pmatrix}, \qquad (3.122)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \Omega} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.123)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \omega} = \boldsymbol{h}_0 \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -z\cos\Omega\sin i - y\cos i \\ x\cos i - z\sin\Omega\sin i \\ y\sin\Omega\sin i + x\cos\Omega\sin i \end{pmatrix}, \quad (3.124)$$

于是有:

$$
\Delta \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma_j}\Delta\sigma_j=\left[\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}-\frac{3}{2}t\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\right]\frac{\Delta a}{a}
$$

$$
+\left[H\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+K\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\right]\frac{\Delta e}{\sqrt{1-e^2}}
$$

$$
+\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\frac{\Delta M_0}{n}+\begin{pmatrix}z\sin\Omega\\ -z\cos\Omega\\ y\cos\Omega-x\sin\Omega\end{pmatrix}\Delta i+\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}\Delta\Omega
$$

$$
+\begin{pmatrix}-z\cos\Omega\sin i-y\cos i\\ x\cos i-z\sin\Omega\sin i\\ y\sin\Omega\sin i+x\cos\Omega\sin i\end{pmatrix}\Delta\omega. \qquad (3.125)
$$

3. $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 $\Delta\alpha$、$\Delta\delta$ 之关系

由(3.33)式 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}$，所以

$$
\begin{pmatrix}\rho\cos\alpha\cos\delta\\ \rho\sin\alpha\cos\delta\\ \rho\sin\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_x\\ \rho_y\\ \rho_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}, \qquad (3.126)
$$

上式两端微分得:

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta\rho\cos\alpha\cos\delta-\rho\sin\alpha\cos\delta\Delta\alpha-\rho\cos\alpha\sin\delta\Delta\delta=\Delta\rho_x\\
&\Delta\rho\sin\alpha\cos\delta+\rho\cos\alpha\cos\delta\Delta\alpha-\rho\sin\alpha\sin\delta\Delta\delta=\Delta\rho_y\\
&\Delta\rho\sin\delta+\rho\cos\delta\Delta\delta=\Delta\rho_z
\end{aligned}\right\}. \qquad (3.127)
$$

由(3.117)得:

$$
\begin{pmatrix}\cos\delta\Delta\alpha\\ \Delta\delta\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}-\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ -\cos\alpha\sin\delta & -\sin\alpha\sin\delta & \cos\delta\end{pmatrix}
\times\left[\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{pmatrix}\right]. \qquad (3.128)
$$

$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 已由(3.125)给出，假如地球的位置(对于人造卫

星而言是测站的位置）能精确地确定，故若 $\Delta X=\Delta Y=\Delta Z=0$，则将（3.125）代入（3.128）最后得轨道改进的条件方程：

$$
\begin{pmatrix}\cos\delta\Delta\alpha\\ \Delta\delta\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}-\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ -\cos\alpha\sin\delta & -\sin\alpha\sin\delta & \cos\delta\end{pmatrix}
$$

$$
\times\left\{\left[\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}-\frac{3}{2}t\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\right]\frac{\Delta a}{a}\right.
$$

$$
+\left[\Delta\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+K\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\right]\frac{\Delta e}{\sqrt{1-e^2}}
$$

$$
+\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\frac{\Delta M_0}{n}+\begin{pmatrix}z\sin\Omega\\ -z\cos\Omega\\ y\cos\Omega-x\sin\Omega\end{pmatrix}\Delta i
$$

$$
\left.+\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}\Delta\Omega+\begin{pmatrix}-z\cos\Omega\sin i-y\cos i\\ x\cos i-z\sin\Omega\sin i\\ y\sin\Omega\sin i+x\cos\Omega\sin i\end{pmatrix}\Delta\omega\right\}.
\tag{3.129}
$$

若 n 次观测，则由（3.129）可列出 $2n$ 个条件方程，若待改进的参数除 6 个初始根数 $\sigma^{(0)}$ 以外还有长期摄动项的系数 $\sigma^{(1)}$、$\Delta\sigma^{(2)}$ 和地球的轨道根数，参考系的零点改进 $\Delta\alpha_0$、$\Delta\delta_0$ 等，则必须 $2n\geqslant s$，s 为待改进的参数的个数。

第四章 N 体 问 题

将N个天体看作质点（质量全部集中于质心），研究它们在相互引力作用下的动力学问题称作N体问题或多体问题。在太阳系各成员之间的距离是如此之大，以致它们本身体积之大小可忽略不计，所以太阳系是一个多体问题。某些星团和星协也可以看作一个大N体问题。在N体问题中只有$N=2$的二体问题得到完全解，这在第二章已作详细讨论。三体以上的N体问题目前只能有近似的解或某些定性的结果。当然由于电子计算机的应用，用数值方法得到的N体问题的解具有相当高的精度。如外行星的坐标已用数值方法推算出四百年的结果。

§1 运动方程和存在的积分

设N个天体 P_1、P_2、……P_n，它们的质量分别是 m_1、m_2、……、m_n，它们在某一惯性系里的位置矢量是 $\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$、……、$\mathbf{r}_n$，根据牛顿的万有引力定律，任意两个天体的相互引力是：

$$f_{ij}=\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^2},$$

式中 r_{ij} 表示 P_i 和 P_j 之间的距离，即 $r_{ij}=|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|$ 按照牛顿第二运动定律，任意一个 P_i 天体的运动方程可写成：

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i=G\sum_{j=1}^{n}\frac{m_im_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i), \tag{4.1}$$

（i 和 j 为正整数 $i\neq j$）。

定义：

$$U=G\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1+i}^{n}\frac{m_im_j}{r_{ij}}, \tag{4.2}$$

U 称 N 体系统的力函数，是一个标量函数，与天体相互位置有关。用力函数 U，可将 (4.1) 式写成：

$$m_i\ddot{r}_i = \frac{\partial U}{\partial r_i}^{*}. \tag{4.3}$$

由 (4.1) 或 (4.3) 看出 N 体系统的运动方程共有 $3n$ 个二阶微分方程，所以是 $6n$ 阶的。若存在 $6n$ 个独立积分：

$$f_i(t, r, v, C_1, C_2, \cdots\cdots, C_{6n}) = 0, \tag{4.4}$$

$(i = 1, 2, \cdots\cdots, 6n,)$，其中 C 为独立的积分常数，它们仅依赖于天体初始时刻的位置和速度。因此 N 体系统中任意天体的位置 r 和速度 v 都可由 (4.4) 式解出，它们是时间 t 和积分常数 C 的函数。200 多年来尽管有很多数学工作者和天体力学工作者致力于这一工作，但到目前，仅找到十个独立的积分，故除二体问题外，其他 N 体系统的求积分问题尚未解决。

从 N 体问题的定义看出，N 体问题就是一般力学中的质点组动力学问题，正如理论力学中所得出的结论那样，整个系统存在动量守恒，动量矩(角动量)守恒和能量守恒三大守恒定律。下面我们导出这三类积分。

1. 动量守恒

将运动方程 (4.1) 两端对 i 求和：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{Gm_im_j(r_j - r_i)}{r_{ij}^3},$$

上式右端在求和过程中 $r_j - r_i$ 项与 $r_i - r_j$ 相加为零，所以右端总和为零，即

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{r}_i = 0,$$

假如天体的质量 m 与时间 t 无关，积分上式得：

---

* $\frac{\partial}{\partial r}$ 表示梯度算符即 $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{C}_1, \tag{4.5}$$

$\boldsymbol{C}_1$ 是积分常数，(4.5) 式表明 n 个天体在相互引力作用下运动时，它们的总动量守恒。

将 (4.5) 式再对时间积分得：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{C}_1 t + \boldsymbol{C}_2, \tag{4.6}$$

$\boldsymbol{C}_2$ 是又一积分常数．设 $\boldsymbol{r}_C$ 是 N 体系统质心的位置矢量，根据质心的定义 $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i$，则 (4.6) 式成为

$$M \boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{C}_1 t + \boldsymbol{C}_2, \tag{4.7}$$

其中 M 为系统质量之总和．(4.7) 式表明系统的质心作匀速直线运动．如果质心作为坐标原点，则由 (4.7) 和 (4.5) 式得：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i = 0,$$

因此，系统的运动方程立即可降低 6 阶。

2. 角动量守恒

将方程(4.1)两端叉乘 $\boldsymbol{r}_i$，并对 i 求和：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_j,$$

同样由于 $\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_j$ 项与 $\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{r}_i$ 之和为零，故上式右端总和也为零，积分后得：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{C}_3. \tag{4.8}$$

$\boldsymbol{C}_3$ 称为角动量积分常数． 由此可见通过系统的质心作一个平面垂直于 $\boldsymbol{C}_3$，该平面不随天体运动而改变，故称不变平面，对于太阳

系，过太阳的这一平面称为拉普拉斯不变面。

3. 能量积分

将运动方程(4.3)两端点乘 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 并对 i 求和：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \tag{4.9}$$

而

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i,$$

故 (4.9) 式右端是 $\frac{dU}{dt}$，积分后得：

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 = U + E, \tag{4.10}$$

E 为积分常数，上式左端为系统的总动能 T，可将 (4.10) 写作：

$$T - U = E,$$

读者自己可以证明 $-U$ 为系统的总位能，故 (4.10) 式的物理意义是能量守恒。至此，我们得到三个动量积分 (4.5)，三个质心运动积分 (4.6)，三个角动量积分 (4.8) 和一个能量积分 (1.10)，共十个积分，这十个积分称作 N 体问题的首次积分(初积分)，利用这十个首次积分可降低 N 体问题运动方程的阶数。

§2　相对非惯性系的运动方程

前一节我们建立了 N 体系统相对某一惯性系的运动方程，然而惯性系是抽象的，绝对的惯性系很难找到。实际上经常选择某一个天体作为研究其他天体运动的参考系。在太阳系，太阳总是作为讨论行星、小行星和彗星等天体运动的参考系，然而以太阳为中心的坐标系不是惯性系。

根据(4.1)式，天体 P_k 在惯性系的运动方程是：

$$m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \frac{G m_k m_i}{r_{ki}^3} \boldsymbol{r}_{ki} + \sum_{j=1, j\neq i,k}^{n} \frac{G m_k m_j}{r_{kj}^3} \boldsymbol{r}_{kj},$$

P_i 的运动方程是:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{Gm_k m_i}{r_{ki}^3}\boldsymbol{r}_{ik} + \sum_{j=1, j\neq i,k}^{n}\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3}\boldsymbol{r}_{ij},$$

将上面两式相减便得 P_i 相对于 P_k 的运动方程:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{ki} = -G\frac{(m_k + m_i)}{r_{ki}^3}\boldsymbol{r}_{ki} + \sum_{j=1, j\neq i,k}^{n} Gm_j\left(\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_{kj}}{r_{kj}^3}\right), \tag{4.11}$$

$\boldsymbol{r}_{ki} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k$ 是 P_i 相对P_k的位置矢量，而 $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{kj} - \boldsymbol{r}_{ki}$，故有

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{ki}}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right) = \frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3},$$

因而 (4.11) 可写作:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{ki} = -\frac{G(m_k + m_i)}{r_{ki}^3}\boldsymbol{r}_{ki} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{ki}}\sum_{j=1, j\neq i,k}^{n} Gm_j\left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\boldsymbol{r}_{ki}\cdot\boldsymbol{r}_{kj}}{r_{kj}^3}\right),$$

按照天体力学的习惯记 $\boldsymbol{r}_{ki} = \boldsymbol{r}$, $m_k = M$, $m_i = m$, $\boldsymbol{r}_{kj} = \boldsymbol{r}_j$, $r_{ij} = \Delta_{ij}$，于是上式成为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(M + m)}{r^3}\boldsymbol{r} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial R_j}{\partial \boldsymbol{r}}, \qquad (j \neq i) \tag{4.12}$$

(4.12) 式中

$$R_j = Gm_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_j}{r_j^3}\right), \tag{4.13}$$

习惯上称天体 P_k 为主星体. (4.12) 式表示任意一个相对主星体位置为 $\boldsymbol{r}$，质量为m的天体，在主星体和其他天体引力作用下的运动方程. R_j 称为摄动函数，它的意义今后还要介绍. 从摄动函数的定义(4.13)式看出在一个N体系统中不同天体的摄动函数值是不相同的. 这对理论研究时往往带来不便. 下面采用一种雅可比(Jacobi) 坐标系，在这种坐标系里N体系统中每个天体的运动方

程具有对称、优美的统一形式。

天体 P_1、P_2、……、P_n 构成N体系统。讨论P_2运动时,采用以P_1为坐标原点的一个直角坐标系。讨论P_3运动时采用以P_1、P_2的质心为坐标原点,坐标轴与前一坐标轴平行的直角坐标,以此类推,最后讨论P_n运动时采用的直角坐标始终与前面的坐标轴平行而坐标原点位于 P_1、P_2、P_3、……、P_{n-1} 的质心。这种坐标称之为雅可比坐标系。下面以三体问题为例推导天体在雅可比坐标系里的运动方程:

P_2相对于P_1的位置 $\boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$,根据(4.3)式:

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}_2' &= \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1\\ &= \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2} - \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_1}\\ &= \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2'} + \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2'},\end{aligned}$$

则

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2' = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2'},$$

或

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\boldsymbol{r}}_2' = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2'}, \tag{4.14}$$

P_1、P_2的质心C在惯性系o-$\xi\eta\zeta$里的位矢是$\boldsymbol{r}_C$,根据质心的定义:

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2), \tag{4.15}$$

于是P_3相对C的运动方程是:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_3' = \ddot{\boldsymbol{r}}_3 - \ddot{\boldsymbol{r}}_C = \ddot{\boldsymbol{r}}_3 - \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2), \tag{4.16}$$

由动量积分得:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 + m_3\ddot{\boldsymbol{r}}_3 = 0, \tag{4.17}$$

将(4.17)式代入(4.16),则有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_3' = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2},\ \ddot{\boldsymbol{r}}_3 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3(m_1 + m_2)}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_3'}, \tag{4.18}$$

如果将$\boldsymbol{r}_2'$、$\boldsymbol{r}_3'$仍记作$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$等，并令：

$$\mu_2=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

$$\mu_3=\frac{m_3(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3}$$

μ_2、μ_3称作折合质量，在雅可比坐标系里，P_2、P_3的运动方程是：

$$\mu_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2=\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2},$$

$$\mu_3\ddot{\boldsymbol{r}}_3=\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_3},$$

不难推出，对于n个天体，在这种坐标系里，它们的运动方程是：

$$\left.\begin{array}{l}\mu_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2=\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2}\\ \mu_3\ddot{\boldsymbol{r}}_3=\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_3}\\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\\ \mu_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n=\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_n}\end{array}\right\}, \tag{4.19}$$

这里
$$\mu_n=\frac{m_n(m_1+m_2+\cdots\cdots m_{n-1})}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_{n-1}+m_n}. \tag{4.20}$$

(4.19)式最后一个方程表示P_n相对其余$n-1$个天体的质心的运动方程.

§3 雅可比公式、N体系统的发散与碰撞问题

由力函数的定义(4.2)式易证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}=-U. \tag{4.21}$$

此外$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ 为N体系统对坐标原点o的转动惯量。用I表示

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \tag{4.22}$$

将I对时间t求二次导数(设m_i与t无关)则有:

$$\ddot{I} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \ddot{r}_i\right)$$

$$= 2\left(2T + \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \frac{\partial U}{\partial r_i}\right),$$

这里T为系统的动能，将(4.21)式代入上式得:

$$\ddot{I} = 2(2T - U) = 2(T + E) = 2(U + 2E), \tag{4.23}$$

E表示系统的总机械能。(4.23)称作N体问题的雅可比公式。(4.23)式中动能T总是正的，而总机械能E可正也可负(当位能大于动能时)从(4.23)看出假如$2T > U$或者说$T > |E|$时$\ddot{I} > 0$即:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right) > 0,$$

故$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)$随着时间$t$无限增大，这说明至少有一个天体的$r_i$随着时间无限地增大。这时系统是发散的。因此要使$N$体系统不发散(设有一个天体随着$t$的增大而运动到无限远的空间去),则必须满足$E < 0$，并且$|E| > T$。这是一个必要条件,并非充分条件,因为若$\ddot{I} < 0$, $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$随$t$而减小，但这并不排除系统中有些天体的$r$不断增加,故系统仍是不稳定的。

我们再转到N体问题中的碰撞问题。N体问题的碰撞与这系统的角动量有关,对这个问题的研究结果,将在下面介绍的宋德曼(Sundman)定理中给出。在证明这个定理之前,我们先叙述两个引理。

① $f(x)$ 是定义在 $a \leqslant x \leqslant b$ 内的两次可微函数，且满足 $f(x) > 0$，$f''(x) > 0$，若 $f(b) = 0$，则有 $f'(x) \leqslant 0$.

证：在区间 $[a, b]$ 之内任找一点 C，若在该点 $f'(C) > 0$，则函数 $f(x)$ 在该点递增，又因 $f(b) = 0$ 故必在 $[C, b]$ 之内有一点 d 使 $f'(d) < 0$，则必在 $[C, d]$ 之间必有一点 e，使 $f'(e) = 0$，$f''(e) < 0$，这与所给条件 $f''(x) > 0$ 矛盾，故引理得证.

② 设 $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$，$B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$，$C = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$

则有

$$C^2 \leqslant A \cdot B, \tag{4.24}$$

(4.24) 式称为柯西 (Cauchy) 不等式：

证：

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_k^2 b_j^2$$

$$C^2 = \left(\sum_{k}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2 + \sum_{k}^{n} \sum_{j \neq k}^{n} a_k b_k a_j b_j,$$

则

$$A \cdot B - C^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (a_k^2 b_j^2 - a_k b_k a_j b_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (2a_k^2 b_j^2 - 2a_k b_k a_j b_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (a_k b_j - b_k a_j)^2 \geqslant 0,$$

$\therefore \quad C^2 \leqslant A \cdot B$.

1. 宋德曼不等式

根据(4.8)式我们有：

$$C_3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i |\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i r_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{m_i}\, r_i \cdot \sqrt{m_i}\, v_i,$$

上式中 C_3 为系统的总角动量 $\boldsymbol{C}_3$ 的模. 根据柯西不等式(4.24)有:

$$C_3^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = 2IT,$$

又由(4.23)得:

$$C_3^2 \leqslant I(\ddot{I} - 2E), \tag{4.25}$$

(4.25)称为宋德曼不等式。

2. 宋德曼定理

N 个质点不可能发生全碰撞,除非系统的角动量为零。

证: 将坐标的原点选择在系统的质心,则

$$\sum_{j=1}^{n} m_j (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)^2 = \sum_{j=1}^{n} m_j r_j^2 - 2\boldsymbol{r}_i \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{r}_j + r_i^2 \sum_{j=1}^{n} m_j$$

$$= I + M r_i^2,$$

其中 $M = \sum_{j=1}^{n} m_j$。将上式两边乘以 m_i,并对 i 求和得:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j r_{ij}^2 = IM + M \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = 2IM, \tag{4.26}$$

若系统全碰撞, 则 $r_{ij} \to 0$, 由(4.26)式知 $I \to 0$ 但这是不可能的,因为

① 若 $t \to \infty$ 时 $r_{ij} \to 0$, $I \to 0$, 根据(4.2)式,$U \to \infty$,又由(4.23)知 $\ddot{I} \to \infty$, 也就是说,必存在某一时刻 t_1, 当 $t > t_1$ 时有:

$$\ddot{I} > 1,$$

将上面的不等式积分两次得:

$$I > \frac{1}{2} t^2 + At + B, \tag{4.27}$$

A、B 为积分常数．由(4.27)看出当 $t\to\infty$ 时 $I\to\infty$，这与全碰撞时 $I\to 0$ 矛盾，故 N 体系统不可能当 $t\to\infty$ 时出现全碰撞．

② 若 $t\to t_1$ 时 $r_{ij}\to 0$，则 $I\to 0$，$U\to\infty$，$\ddot{I}\to\infty$．于是总存在一区间当 $t_2\leqslant t\leqslant t_1$ 时使得 $\ddot{I}>0$，又 $I>0$，因此根据引理 1，$-\dot{I}\geqslant 0$ 则 $-\dot{I}I^{-1}\geqslant 0$．将(4.25)式两端乘以 $-\dot{I}I^{-1}$ 得：

$$-\dot{I}I^{-1}C_1^2\leqslant-\dot{I}I^{-1}I(\ddot{I}-2E)=2E\dot{I}-\dot{I}\ddot{I},$$

上式两端对 t 积分 $(t>t_2)$ 得：

$$C_1^2\ln I^{-1}\leqslant 2EI-\frac{1}{2}\dot{I}^2+K\leqslant 2EI+K,$$

K 为积分常数．故有：

$$C_1^2\leqslant\frac{2EI+K}{\ln I^{-1}}. \tag{4.28}$$

因 $t\to t_1$ 时 $I\to 0$，$\ln I^{-1}\to\infty$，则 $C_1\to 0$，但 C_1 为常数，故只能 $C_1=0$，否则将不会出现 $t\to t_1$ 时 $r_{ij}\to 0$ 的情况．

§4　三体问题及其特解

二体问题是一个可积系统，它已得到完满的解决（第二章内容），而三体问题的情况则完全不同．由(4.3)式看出三体问题的运动方程是十八阶的，其完全解应有十八个独立的首次积分，除在本章§1中得到十个经典积分外，还需有八个独立积分才能得到三体系统的完全解．历史上曾经有许多著名的数学家和力学家对严格解三体问题作过大量研究． 1772 年拉格朗日用消除自变量和交点经度的方法将运动方程降至六阶，1843 年雅可比从理论上证明了如果除两个积分外，其余积分能找到，那么三体问题可积．因此不少人想通过寻找新积分的方法继续降低三体问题的阶数以求得问题的进一步解决．然而一直没有成功．1887 年布伦斯(Bruns) 证明除十个经典积分外三体问题不再存在其他的代数积分．1889 年庞加来 (Poincaré) 又证明新的单值解析积分也不存

在. 1941 年西格尔 (C. L. Sieqel) 证明平面圆型限制性三体问题除雅可比积分外不存在新的代数积分. 如此看来用找新积分的方法解三体问题的前景渺茫. 不过前面所述的一些结论都是在一定条件之下得到的,因此找新积分的途径还是值得继续探讨的.

假设 P_1、P_2、P_3 是三个具有任意质量 m_1、m_2、m_3 的天体,它们不受其他外力,在相互的引力作用下运动. 以它们的质心 o 为原点,建立一个惯性系 $o\text{-}\xi\eta\zeta$,使 $\xi\eta$ 平面与 P_1、P_2、P_3 所在的平面重合,天体 $P_k(k=1,2,3)$ 在该坐标系的运动方程是:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi}_k \\ \ddot{\eta}_k \\ \ddot{\zeta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial \xi_k} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \eta_k} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

其中 $$V = G\left(\frac{m_i}{\Delta_{ki}} + \frac{m_j}{\Delta_{kj}}\right), \quad \Delta_{kj} = r_j - r_k,$$

$$\left.\begin{matrix} i \\ j \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, \qquad i \neq j \neq k.$$

再以质心 o 为原点,建立一旋转坐标系 $o\text{-}xyz$, z 为旋转轴,并与 φ 轴重合,若旋转角速度是 n,则固定系 $o\text{-}\xi\eta\zeta$ 与旋转系 $o\text{-}xyz$ 的关系是:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

其中 $$A = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

由(4.30)得:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \frac{dA}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

三体中任意一天体 P_k 在旋转系里的运动方程是：

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_k - 2n\dot{y}_k - n^2 x_k &= \frac{\partial V}{\partial x_k} \\
\ddot{y}_k + 2n\dot{x}_k - n^2 y_k &= \frac{\partial V}{\partial y_k} \\
\ddot{z}_k &= \frac{\partial V}{\partial z_k}
\end{aligned}\right\} \tag{4.33}
$$

现在，让我们寻找一组在旋转坐标系里的常数解，即满足 $\ddot{x}_k = \ddot{y}_k = \ddot{z}_k = \dot{x}_k = \dot{y}_k = \dot{z}_k = 0$ 的解，则由 (4.33) 式得：

$$
\left.\begin{aligned}
-n^2 x_k &= \frac{\partial V}{\partial x_k} \\
-n^2 y_k &= \frac{\partial V}{\partial y_k}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.34}
$$

上式的矢量形式为

$$
-n^2 \boldsymbol{r}_k = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_k}, \tag{4.34'}
$$

也就是：

$$
\boldsymbol{r}_k = -\frac{G}{n^2}\left(\frac{m_i \boldsymbol{\Delta}_{ki}}{\Delta_{ki}^3} + \frac{m_j \boldsymbol{\Delta}_{kj}}{\Delta_{kj}^3}\right),
$$

若令
$$
\rho_j = \frac{G}{n^2}\Delta_{ki}^{-3}, \quad \rho_i = \frac{G}{n^2}\Delta_{kj}^{-3}, \tag{4.35}
$$

则
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_k &= -\rho_j m_i \boldsymbol{\Delta}_{ki} - \rho_i m_j \boldsymbol{\Delta}_{kj} \\
&= \rho_j m_i(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i) + \rho_i(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j),
\end{aligned}
$$

或
$$
(1 - \rho_j m_i - \rho_i m_j)\boldsymbol{r}_k + \rho_j m_i \boldsymbol{r}_i + \rho_i m_j \boldsymbol{r}_j = 0,
$$

上面的方程共有三个：

$$
\left.\begin{aligned}
(1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2)\boldsymbol{r}_1 + m_2\rho_3\boldsymbol{r}_2 + m_3\rho_2\boldsymbol{r}_3 &= 0 \\
(1 - m_3\rho_1 - m_1\rho_3)\boldsymbol{r}_2 + m_3\rho_1\boldsymbol{r}_3 + m_1\rho_3\boldsymbol{r}_1 &= 0 \\
(1 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1)\boldsymbol{r}_3 + m_2\rho_1\boldsymbol{r}_2 + m_1\rho_2\boldsymbol{r}_1 &= 0
\end{aligned}\right\}, \tag{4.36}
$$

根据质心的定义有：

$$
\boldsymbol{r}_3 = -\frac{1}{m_3}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2), \tag{4.37}
$$

将(4.37)式代入(4.36)的第一式得：

$$(1-m_2\rho_3-m_3\rho_1-m_1\rho_2)\boldsymbol{r}_1+m_2(\rho_3-\rho_2)\boldsymbol{r}_2=0, \quad (4.38)$$

若 P_1、P_2、P_3 不在同一直线上，则 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 线性无关，(4.38)式中的 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 的系数应为零，故有 $\rho_2=\rho_3$，同理若将(4.37)式代入(4.36)的第二式或第三式还可得 $\rho_1=\rho_3$。于是有 $\rho_1=\rho_2=\rho_3$，再由(4.38)式中 $\boldsymbol{r}_1$ 的系数为零得：

$$\rho=\frac{1}{M}, \quad (4.39)$$

其中 $M=m_1+m_2+m_3$，这样从(4.35)式不难得到：

$$\Delta_{12}=\Delta_{23}=\Delta_{31}=\left(\frac{GM}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}=r, \quad (4.40)$$

(4.40)式说明这种特解使三体始终保持一个等边三角形，故称等边三个解。假如 n 是常数，则 r 为常数，这时三个天体绕它们的共同质心各自作等速圆运动，而它们的相对位置始终保持等边三角形。更一般的情况是三个天体相对于它们的质心的轨道是椭圆(或其他的圆锥曲线)。由(4.34)′和(4.40)式，P_1 的运动方程可写成：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=\frac{G}{r^3}(m_2\boldsymbol{\Delta}_{12}+m_3\boldsymbol{\Delta}_{13}), \quad (4.41)$$

又利用(4.37)得：

$$M\boldsymbol{r}_1+m_2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+m_3(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0,$$

即

$$M\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{\Delta}_{12}+m_3\boldsymbol{\Delta}_{13}=0, \quad (4.42)$$

(4.42)式代入(4.41)式得：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}_1, \quad (4.43)$$

从(4.42)式得：

$$M^2r_1^2=m_2^2\Delta_{12}^2+m_3^2\Delta_{13}^2+2m_2m_3\boldsymbol{\Delta}_{12}\cdot\boldsymbol{\Delta}_{13}=r^2M_1^2 \quad (4.44)$$

其中 $M_1^2=m_2^2+m_3^2+m_2m_3$，由(4.44)得：

$$r=\frac{M}{M_1}r_1 \quad (4.45)$$

(4.45)式代入(4.43)式得:

$$\ddot{r}_1 = -\frac{GM_1^3}{M^2}\frac{r_1}{r_1^3} \tag{4.46}$$

上式表明天体 P_1 的运动方程与二体问题的运动方程 (2.4) 类似，故 (4.46) 式的解为一个圆锥曲线。 同理可得 P_2、P_3 的运动方程是:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}_2 &= -\frac{GM_2^3}{M^2}\frac{r_2}{r_2^3} \\ \ddot{r}_3 &= -\frac{GM_3^3}{M^2}\frac{r_3}{r_3^3} \end{aligned}\right\}, \tag{4.47}$$

其中 $M_2 = \sqrt{m_1^2 + m_3^2 + m_1m_3}$, $M_3 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1m_2}$。

方程 (4.46)、(4.47) 说明作圆锥曲线运动的三个天体，它们存在等边三角形的特解如图(4-1)。

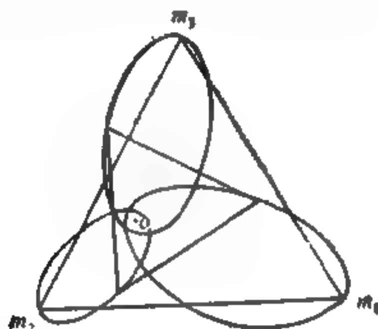


图 4-1

另一种情况是三天体 $P_1(x_1, 0)$、$P_2(x_2, 0)$、$P_3(x_3, 0)$, 在同一直线上且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $\Delta_{12} = x_2 - x_1$, $\Delta_{23} = x_3 - x_2$, $\Delta_{13} = x_3 - x_1$, 由(4.34)式得:

$$\left.\begin{aligned} -n^2x_1 &= G\left[\frac{m_2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{m_3}{(x_3 - x_1)^2}\right] \\ n^2x_3 &= G\left[\frac{m_1}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{m_2}{(x_3 - x_2)^2}\right] \end{aligned}\right\}, \tag{4.48}$$

设 $\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}}=\rho$，则若 $\Delta_{12}=a$，$\Delta_{23}=a\rho$，$\Delta_{13}=(1+\rho)a$ 其中 a 为任意正数。于是由(4.48)得：

$$-\frac{x_1}{x_3}=\frac{m_2+m_3(1+\rho)^{-2}}{m_1(1+\rho)^{-2}+m_2\rho^{-2}},\tag{4.49}$$

将 $x_2=x_1+\Delta_{12}=x_1+a$，$x_3=x_1+\Delta_{13}=x_1+a(1+\rho)$ 代入 $x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3=0$ 得：

$$Mx_1+am_2+a(1+\rho)m_3=0,$$

其中 M 为 $\sum_{i=1}^{3}m_i$。同样方法可得：

$$-Mx_3+m_1a(1+\rho)+m_2a\rho=0,$$

将上面两式相比得：

$$-\frac{x_1}{x_3}=\frac{m_2+m_3(1+\rho)}{m_1(1+\rho)+m_2\rho},\tag{4.50}$$

(4.49)与(4.50)右端应相等而得：

$$\frac{m_2+m_3(1+\rho)}{m_1(1+\rho)+m_2\rho}=\frac{m_2\rho^2(1+\rho)^2+\rho^2m_3}{m_1\rho^2+m_2(\rho+1)^2},$$

上式是一个 ρ 的五次方程：

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\rho^5&+(3m_1+2m_2)\rho^4\\&+(3m_1+m_2)\rho^3-(m_2+3m_3)\rho^2\\&-(2m_2+3m_3)\rho-(m_2+m_3)=0,\end{aligned}\tag{4.51}$$

(4.51)式中 ρ 的系数只变号一次，故有，且仅有一正实根。ρ 仅与 m_1、m_2、m_3 有关。即 P_1、P_2、P_3 在直线上的位置仅与三个天体的质量分布有关，对于一种质量分布有确定的三个直线解。

§5 圆型限制性三体问题

在三体问题中，如果其中的一个天体的质量无限小，以至它的存在不影响其他两个有限质量的天体在相互的引力作用下运动。这类三体问题称之为限制性三体问题。在太阳系，一小行星(或彗

星)在太阳和一大行星作用下运动；在地月系，一月球火箭在地球和月球引力作用下运动，这类动力学体系都可以看作一个近似的限性制三体问题．限制性三体问题又可根据两个有限质量的天体的相对运动轨道形状分成圆型、椭圆型、抛物型等．本节介绍圆型限制性三体问题的某些运动特性．

1. 运动方程

图(4-2)中 P_1、P_2 代表两个有限质量的天体，通常称主星体，

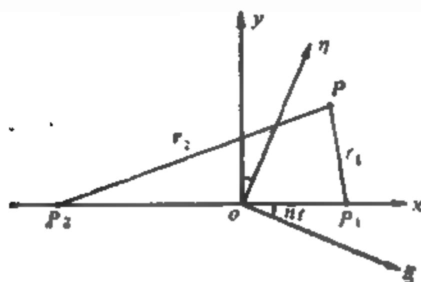


图 4-2

它们的质量分别是 m_1、m_2，它们绕质心 o 作圆运动．P 代表小天体，其质量为 m，并且 $m \ll m_1$、m_2．o-$\xi\eta\zeta$ 为一固定坐标系，$\xi\eta$ 平面与 P_1、P_2 的轨道平面重合，在该坐标系中 P_1、P_2、P 的位置分别用 $\boldsymbol{R}_1(\xi_1, \eta_1, o)$、$\boldsymbol{R}_2(\xi_2, \eta_2, o)$ 和 $\boldsymbol{r}(\xi, \eta, \zeta)$ 表示之，P 至 P_1 和 P_2 的距离用 r_1 和 r_2 表示．P 点的引力位函数：

$$V = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}, \tag{4.52}$$

小天体 P 的运动方程：

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = -G\begin{pmatrix} \dfrac{m_1(\xi-\xi_1)}{r_1^3} + \dfrac{m_2(\xi-\xi_2)}{r_2^3} \\ \dfrac{m_1(\eta-\eta_1)}{r_1^3} + \dfrac{m_2(\eta-\eta_2)}{r_2^3} \\ \dfrac{m_1\zeta}{r_1^3} + \dfrac{m_2\zeta}{r_2^3} \end{pmatrix}, \tag{4.53}$$

设 P_1、P_2 相对质心的圆运动角速度为 n，则有：

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta_1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1\cos nt\\ R_1\sin nt\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\xi_2\\ \eta_2\\ 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}R_2\cos nt\\ R_2\sin nt\\ 0\end{pmatrix},$$

显然 (4.53) 式右端显含时间 t. 如果选用以 n 为角速度的旋转坐标系 $o\text{-}xyz$，使 xy 平面重合于 $\xi\eta$ 平面，x 轴始终指向 P_1，在该坐标系中 P_1、P_2 和 P 的位置分别是 $R_1(x_1, 0, 0)$、$R_2(x_2, 0, 0)$ 和 $r(x, y, z)$，$x_1=R_1=$ 常数，$x_2=-R_2=$ 常数. 根据坐标变换 (4.30)、(4.31) 和 (4.32) 式得：

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}-2n\begin{pmatrix}0&1&0\\ -1&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}-n^2\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$=-G\begin{pmatrix}\dfrac{m_1(x-x_1)}{r_1^3}+\dfrac{m_2(x-x_2)}{r_2^3}\\ \dfrac{m_1y}{r_1^3}+\dfrac{m_2y}{r_2^3}\\ \dfrac{m_1z}{r_1^3}+\dfrac{m_2z}{r_2^3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial x}\\ \dfrac{\partial V}{\partial y}\\ \dfrac{\partial V}{\partial z}\end{pmatrix},\tag{4.54}$$

(4.54) 右端 V 的表达式是 (4.52) 式，但 r_1、r_2 应该用新坐标表示，则

$$\left.\begin{aligned}r_1^2&=(x-x_1)^2+y^2+z^2\\ r_2^2&=(x-x_2)^2+y^2+z^2\end{aligned}\right\},\tag{4.55}$$

(4.54) 式也可写成：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= \frac{\partial V}{\partial x}\\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= \frac{\partial V}{\partial y}\\ \ddot{z} \qquad\qquad &= \frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}\right\}, \tag{4.56}$$

若令

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+V\\ &= \frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+\frac{Gm_1}{r_1}+\frac{Gm_2}{r_2}\end{aligned}$$

则运动方程(4.56)成为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}\\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}\\ \ddot{z} \qquad &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}\end{aligned}\right\}, \tag{4.57}$$

若采用 P_1、P_2 之距离 $R_1 + R_2$ 为长度单位，P_1、P_2 之质量和 $m_1 + m_2$ 为质量单位,并引入新的自变量 τ 使 $\tau = nt$，这时P的无量纲运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}\\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}\\ \ddot{z} \qquad &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}\end{aligned}\right\}, \tag{4.58}$$

(注意：(4.58)式中的 $\ddot{x}$、$\dot{x}$ 等表示对新自变量 τ 的二次求导和一次求导)，习惯上设质量较小的主星体的质量 m_2 为 μ，则 $m_1 = 1 - \mu$，故有 $R_1 = \mu$，$R_2 = 1 - \mu$。这时(4.58)式中的

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2} \tag{4.59}$$

2. 拉格朗日特解

运动方程 (4.58) 存在一组常数解，这时小天体相对旋转系位置不变，即 $\dot{r}=0$，$\ddot{r}=0$，容易由 $\frac{\partial \Omega}{\partial x}=\frac{\partial \Omega}{\partial y}=\frac{\partial \Omega}{\partial z}=0$ 得到这组特解应满足：

$$\left.\begin{aligned}
&x-\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3}-\frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}=0\\
&y-\frac{(1-\mu)y}{r_1^3}-\frac{\mu y}{r_2^3}=0\\
&-\frac{(1-\mu)z}{r_1^3}-\frac{\mu z}{r_2^3}=0
\end{aligned}\right\}, \qquad (4.60)$$

由 (4.60) 第三式看出 $z=0$，所以特解必在 xy 平面上。(4.60) 第二式的解，可分两种情况：

$$① \ y\neq 0,\ 1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}=0, \qquad (4.61)$$

将 (4.61) 式代入 (4.60) 第一式得：

$$\frac{(1-\mu)\mu}{r_1^3}=\frac{\mu(1-\mu)}{r_2^3},$$

即 $r_1=r_2=1$。故对应的特解应与 P_1、P_2 构成等边三角形；如图(4-3)的 $L_4(X_4, Y_4)$ 和 $L_5(X_5, Y_5)$。显然

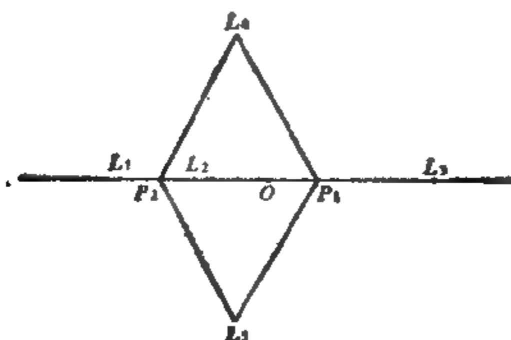


图 4-3

$$
\left.\begin{aligned}
X_{4,5} &= \mu - \frac{1}{2} \\
Y_{4,5} &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.62}
$$

$L_4(X_4, Y_4)$，$L_5(X_5, Y_5)$ 称为等边三角形解。

② $y = 0$，$1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \neq 0$，这时特解在 x 轴上，故可令 $r_1 = |x - \mu|$，$r_2 = |x + 1 - \mu|$，则(4.60)第一式成为

$$
x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{|x-\mu|^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{|x+1-\mu|^3} = 0, \tag{4.63}
$$

$x = \mu$ 和 $x = \mu - 1$ 是(4.63)式的两个奇点，容易看出(4.63)式分别在 $(-\infty, \mu-1)$，$(\mu-1, \mu)$ 以及 $(\mu, +\infty)$ 三区间内有，且仅有一个实根，即方程(4.63)有三个特解，它们在图(4-3)中分别以 $L_1(x_1, 0)$，$L_2(x_2, 0)$ 和 $L_3(x_3, 0)$ 表示之：

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= \mu - 1 - \xi^{(1)} \\
x_2 &= \mu - 1 + \xi^{(2)} \\
x_3 &= \mu + \xi^{(3)}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.64}
$$

其中 $\xi^{(i)}(i = 1, 2, 3)$ 是正实数。可用迭代法解方程(4.63)。对于特解 L_1，有 $x < \mu - 1 < \mu$，则 $r_1 = |x - \mu| = -(x - \mu)$，$r_2 = |x + 1 - \mu| = -(x + 1 - \mu)$，故(4.63)式可写成：

$$
x + \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} + \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2} = 0. \tag{4.65}
$$

(4.65)式是 x 的五次方程，若令 $r_2 = \xi > 0$，则 $r_1 = 1 + \xi$，$x = \mu - 1 - \xi$，代入(4.65)式得关于 ξ 的一个五次方程：

$$
\begin{aligned}
\xi^5 + (3-\mu)\xi^4 + (3-2\mu)\xi^3 - \mu\xi^2 \\
- 2\mu\xi - \mu = 0.
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

由于 $0 < \mu < \frac{1}{2}$，上式系数仅变号一次，根据笛卡儿判别法则(4.66)仅有一个正实根。将(4.66)式改写成：

$$
\frac{\xi^3(1 + \xi + \xi^2/3)}{(1+\xi)^2(1-\xi^3)} = \frac{\mu}{3(1-\mu)} = \nu^3. \tag{4.67}
$$

其中 $\nu=\left[\frac{\mu}{3(1-\mu)}\right]^{1/3}<1$，由(4.66)式可知当 $\mu\to 0$ 时，$\xi\to 0$，通常 μ 是小量，故 ξ 也为小量，由(4.67)式看出 ξ 与 ν 同量级，因此可将 ξ 展成 ν 的幂级数形式：

$$\xi=a_1\nu+a_2\nu^2+a_3\nu^3+a_4\nu^4+\cdots\cdots,$$

其中 a_1、a_2、a_3 等为待定系数，将上式代入(4.67)后比较两端 ν 的同次幂系数得：

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{3},\quad a_3=-\frac{1}{9},\quad a_4=-\frac{31}{81},$$

因此方程(4.66)的解为

$$\xi^{(1)}=\nu\left(1+\frac{1}{3}\nu-\frac{1}{9}\nu^2-\frac{31}{81}\nu^3-\frac{119}{243}\nu^4-\frac{1}{9}\nu^5-\cdots\right),$$

再将 ν 展开成 $\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}$ 的幂级数，则有：

$$\xi^{(1)}=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}+\cdots\cdots\right],\tag{4.68}$$

对于 L_2 和 L_3 用同样的方法可求出：

$$\left.\begin{aligned}\xi^{(2)}&=\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}+\cdots\cdots\right]\\ \xi^{(3)}&=1+\frac{7}{12}\mu\left[1+\frac{23}{84}\left(\frac{7}{12}\mu\right)^2+\cdots\cdots\right.\end{aligned}\right\},\tag{4.69}$$

将(4.68)和(4.69)式代入(4.64)便得 $L_1(x_1,0)$，$L_2(x_2,0)$，和 $L_3(x_3,0)$ 的位置，它们与系统的质量比 μ 有关。L_1、L_2、L_3 称为直线解，五个特解 L_i $(i=1,2,\cdots 5)$ 总称拉格朗日特解或拉格朗日平动点，1772年由拉格朗日得到。脱罗央群小行星正处在太阳——木星系统的三角平动点位置。

3. 雅可比积分和希尔朗准则

由于运动方程(4.57)式中的 Ω 不显含自变量，故可将它的三

个方程分别乘以 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 和 $\dot{z}$ 相加后积分便得雅可比积分：

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2\Omega-C,$$

即
$$v^2=2\Omega-C, \tag{4.70}$$

其中 v 为小天体在旋转坐标系里的速度，C 为积分常数. 利用固定坐标系与旋转坐标系的关系式 (4.30) 和 (4.32)，(4.70) 式用固定坐标表示为

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2-2(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})=\frac{2(1-\mu)}{r_1}+\frac{2\mu}{r_2}-C, \tag{4.71}$$

对于太阳系、太阳、某一大行星(如木星)和彗星构成一限制性三体问题，两次测得彗星相对太阳的位置 (ξ,η,ζ) 和速度 $(\dot{\xi},\dot{\eta},\dot{\zeta})$ 代入(4.71)式，若积分常数 C 值不变，便可判定两次观测到的是同一颗彗星，这就是著名的蒂塞朗 (Tisserand) 准则. 事实上很难直接测出 $(\dot{\xi},\dot{\eta},\dot{\zeta})$，故首先将彗星轨道近似为一个二体问题，应满足活力积分：

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2=v^2=\frac{2}{r_1}-\frac{1}{a}, \tag{4.72}$$

这里 r_1 为彗星到太阳的距离，a 为彗星轨道半长径. (4.71) 式中的 $(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})$ 为角动量 h 在 z 轴方向的分量，故：

$$\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=h\cos i=\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, \tag{4.73}$$

e 和 i 为彗星轨道的偏心率和倾角.

将 (4.72) 和 (4.73) 代入 (4.71) 后得：

$$\frac{2}{r_1}-\frac{1}{a}-2\sqrt{a(1-e^2)}\cos i$$
$$=\frac{2}{r_1}+2\mu\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)-C,$$

r_2 是彗星到木星的距离，选择适当的观测时刻使 r_1 与 r_2 接近，$2\mu\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=0$，则有：

$$\frac{1}{a}+2\sqrt{a(1-e^2)}\cos i=C,$$

这表明，假如两次观测得到的彗星的轨道根数 a_1、e_1、i_1 和 a_2、i_2、e_2 满足：

$$\frac{1}{a_1}+2\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\cos i_1$$
$$=\frac{1}{a_2}+2\sqrt{a_2(1-e_2)}\cos i_2, \qquad (4.74)$$

则两次观测的是同一彗星。显然这一判别方法是很粗略的。

4. 零速度面

雅可比积分是在旋转坐标系中的能量积分，它也反映了在这种坐标系中小天体的速度与位置的关系，利用这一关系可以限制小天体的运动区域。因为 $v^2\geqslant 0$，所以 $2\Omega-C\geqslant 0$，积分常数 C，可由初始位置和速度确定。公式中等号表示极限的情况。对应 $v=0$，则有 $2\Omega-C=0$ 的曲面：

$$x^2+y^2+\frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}}+\frac{2\mu}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2+z^2}}$$
$$=C>0, \qquad (4.75)$$

称为零速度面，在这一曲面上小天体的位能为常数，故也称等位面。有时也叫希耳(Hill)曲面。由(4.75)看出 C 总是大于零的，其上限 $\to\infty$ 下限是 3（读者可自己证明）。不同的 C 值对应一族零速度面。零速度面随 C 值的不同而变化。它又限制了小天体的运动区域。为较简单明确地说明这些问题，以 $z=0$，在 xy 平面上的零速度曲线为代表进行讨论，这时(4.75)式成为

$$x^2+y^2+\frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}}+\frac{2\mu}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}}=C, \qquad (4.76)$$

由(4.76)式知，零速度曲线对称 x 轴，并且当 $(x,y)\to\infty$ 或 $x\to x_1$，$y\to 0$ 以及 $x\to x_2$，$y\to 0$ 时 $C\to\infty$。反之对于一个很大的 C，也有三种情况。

① (x,y) 很大，曲线(4.76)可近似写成

$$x^2+y^2=C, \qquad (4.77)$$

这是一个以质心 o 为圆心，以 $\sqrt{C}$ 为半径的圆。又从(4.59)式可知这时 $2\Omega = x^2 + y^2$。在圆上满足 $2\Omega - C = v^2 = 0$；在圆之外 $2\Omega - C > 0$，即 $v^2 > 0$，是小天体可到达的区域；在圆之内 $2\Omega - C < 0$，$v^2 < 0$ 是小天体不可到达区域。

② $x \to x_1$，$y \to 0$，小天体接近主星体 P_1，曲线(4.76)近似成为

$$\frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} = C, \tag{4.78}$$

显然是一个以 P_1 为圆心以 $\frac{2(1-\mu)}{C}$ 为半径的圆。再由(4.59)式可得：$2\Omega = \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}}$。因而在该圆之上满足 $2\Omega - C = 0$，在该圆之外 $2\Omega - C < 0$，$v^2 < 0$，是小天体运动的禁区；在该圆之内，$v^2 = 2\Omega - C > 0$，是小天体的可到达区。

③ $x \to x_2$，$y \to 0$。

小天体靠近主星体 P_2 零速度曲线成为

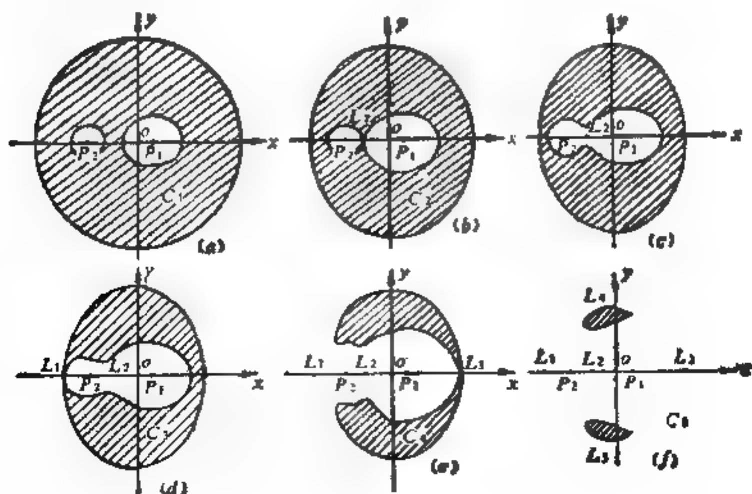


图 4-4

$$\frac{2\mu}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}} \approx C, \tag{4.79}$$

是一个以 P_2 为圆心，以 $\frac{2\mu}{C}$ 为半径的圆．小天体的可运动区与禁止区同(2)所述．图(4-4a)表示了以上三种情况，影线部分表示运动禁区．三条封闭曲线分别代表前面所说的三条零速度线．

当 C 由大变小时，三条零速度线的半径 r 分别以 $\frac{dr}{dC}=$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{C}}, \quad \frac{dr}{dC}=-\frac{2(1-\mu)}{C^2}, \quad \frac{dr}{dC}=-\frac{2\mu}{C^2}$$

的速度变化，显然最大的外圆随 C 的变小而缩小，内部两个小圆随 C 的增加而扩大，当 C 减小到某一个值 C_2 时，两小圆出现交点 L_2，如图(4-4b)．这时，两个小圆内部的可运动区域开始连通．当 $C<C_2$ 时，P_1、P_2 附近的运动区域呈哑铃状，如图(4-4c)．C 减小到 C_1 时，内部不断扩大的哑铃状区域与外部逐渐缩小近圆形区域交于 L_1 点，于是内部的运动区域与外部的运动区域开始连通，如图(4-4d)，C 继续减小时，零速度曲线在 L_1 点拉开成对称 x 轴的图形直至 C 小到 C_3，对称的图形仅在 L_3 相连，如图(4-4e)等到 $C<C_3$ 时，上面所说的对称图形在 L_3 点拉开后形成对称 x 轴的两条封闭曲线，如图(4-4f)，此时运动禁区分裂成相互不连通的两部分．C 继续减小，直至 $C=C_5$ 时，零速度线收缩成两点 L_4、L_5．除这两点外，全平面都是可运动区．

从上面的分析看，当实际的积分常数 $C<C_2$ 时，处在 P_1（或 P_2）附近的小天体不可能穿越零速度曲面而远离 P_1（或 P_2），这时我们称小天体是希耳稳定的．

上面所说五个交点 L_1、L_2、L_3、L_4 和 L_5 也就是前面所介绍的五个拉格朗日特解．因为零速度曲面方程(4.75)可写成 $f(x, y, z)=2\Omega-C=0$ 该曲面过某一点 (x_i, y_i, z_i) 点的法线方程是：

$$\frac{x-x_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i}=\frac{y-y_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_i}=\frac{z-z_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_i}=\text{常数},$$

而在交点 $L_i\ (i=1,2,3,4,5)$ 处法线方向不定，是该曲面的奇点，因而有 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$. 也就是$\frac{\partial \Omega}{\partial x}=\frac{\partial \Omega}{\partial y}=\frac{\partial \Omega}{\partial z}=0$, 这正是拉格朗日特解所满足的方程，所以交点 L_i 即为平动点. 由前面的讨论可知，当系统的质量参数 μ 为已知时，平动点 $L_i(X_i, Y_i)$ 的位置可求出. (X_i, Y_i) 是 μ 的函数 $X_i(\mu)$、$Y_i(\mu)$. 只要将 $X_i(\mu)$、$Y_i(\mu)$ 代入零速度曲面方程(4.75)即可得相应的常数 C_2、C_3、C_4、C_5. 它们是:

$$\left.\begin{aligned}
C_2&=X_2^2+\frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(X_2-\mu)^2}}+\frac{2\mu}{\sqrt{(X_2+1-\mu)^2}}\\
C_3&=X_1^2+\frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(X_1-\mu)^2}}+\frac{2\mu}{\sqrt{(X_1+1-\mu)^2}}\\
C_4&=X_3^2+\frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(X_3-\mu)^2}}+\frac{2\mu}{\sqrt{(X_3+1-\mu)^2}}\\
C_5&=X_4^2+Y_4^2+\frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(X_4-\mu)^2+Y_4^2}}+\frac{2\mu}{\sqrt{(X_4+1-\mu)^2+Y_4^2}}
\end{aligned}\right\}. \tag{4.80}$$

§6 椭圆型限制性三体问题

假如两个主星体 P_1 和 P_2 相对质心 o 的运动轨道是椭圆，根据第二章的结果，这时 P_1、P_2 相对运动的轨道也是椭圆，并且三个椭圆的偏心率相等. 现在仍然引入一个旋转坐标系 $o\text{-}xyz$, xy 平面与 P_1、P_2 的轨道平面重合, x 轴始终指向 P_1, 显然这是一个以 z 为旋转轴的非均匀旋转系，其旋转角速度是 $\frac{df}{dt}$, (f 是 P_1 或 P_2 相对质心运动的真近点角，也是 P_1、P_2 相对运动的真近点角)，在

该坐标系中 P_1 位于 (x_1, o, o)，P_2 位于 (x_2, o, o)，此时 x_1、x_2 不再为常数，而有：

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos f}\\
x_2 &= -\frac{a_2(1-e^2)}{1+e\cos f}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.81}
$$

a_1、a_2 分别是 P_1、P_2 相对质心的椭圆轨道的半长径。

设 $t=0$ 时 x 轴与固定坐标轴 ξ 重合，到 t 时刻时 x 轴旋转 f 角，在旋转系中的 (x, y, z) 与固定系中的 (ξ, η, ζ) 之关系与(4.30)式相似，有

$$
\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} &= K\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\ddot\xi\\ \ddot\eta\\ \ddot\zeta\end{pmatrix} &= K\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix}+2\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix}+\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.82}
$$

其中

$$
K=\begin{pmatrix}\cos f & -\sin f & 0\\ \sin f & \cos f & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},
$$

$$
\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-\sin f & -\cos f & 0\\ \cos f & -\sin f & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\dot f,
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}t^2}=\begin{pmatrix}-\cos f & \sin f & 0\\ -\sin f & -\cos f & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\dot f^2+\begin{pmatrix}-\sin f & -\cos f & 0\\ \cos f & -\sin f & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ddot f.
$$

将(4.82)式代入(4.29)式后得椭圆限制性问题中小天体在旋转坐标系里的运动方程：

$$
\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix}-2\dot f\begin{pmatrix}0 & +1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix}-\dot f^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}
$$

$$-\ddot{f}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial x}\\ \dfrac{\partial V}{\partial y}\\ \dfrac{\partial V}{\partial z}\end{pmatrix},$$

即

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{f}\dot{y} &= \frac{\partial V}{\partial x}+x\dot{f}^2+y\ddot{f}\\ \ddot{y}+2\dot{f}\dot{x} &= \frac{\partial V}{\partial y}+y\dot{f}^2-x\ddot{f}\\ \ddot{z} &= \frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}\right\},\tag{4.83}$$

(4.83)式与(4.58)式比较,两方程形式不同,但可作进一步坐标变换简化方程(4.83)。

若以两主星体 P_1、P_2 之间的距离 r 作为长度单位,可以得到一个旋转的波动坐标系。以 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 表示天体在该坐标系的位置,(x,y,z) 与 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 的关系是:

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}\\ \dot{\bar{y}}\\ \dot{\bar{z}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix}\dot{r}\\ \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix}\ddot{\bar{x}}\\ \ddot{\bar{y}}\\ \ddot{\bar{z}}\end{pmatrix}+2\dot{r}\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}\\ \dot{\bar{y}}\\ \dot{\bar{z}}\end{pmatrix}+\ddot{r}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\},\tag{4.84}$$

其中

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f},$$

再以 f 代替自变量 t,引入算符:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dot{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}=\dot{f}^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}f^2}+\ddot{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f},$$

由(4.84)式得:

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}&=r\dot{f}\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\\ \bar{z}'\end{pmatrix}+\dot{r}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}&=r\begin{pmatrix}\dot{f}^2\bar{x}''+\ddot{f}\bar{x}'\\ \dot{f}^2\bar{y}''+\ddot{f}\bar{y}'\\ \dot{f}^2\bar{z}''+\ddot{f}\bar{z}'\end{pmatrix}+2\dot{r}\dot{f}\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\\ \bar{z}'\end{pmatrix}+\ddot{r}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}. \tag{4.85}$$

$\bar{x}'$、$\bar{x}''$等表示$\bar{x}$对f求一阶微商和二阶微商。

又因为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x}&=-Gm_1\frac{(x-x_1)}{r_1^3}-Gm_2\frac{(x-x_2)}{r_2^3}\\
&=-G\left[\frac{m_1(\bar{x}-\bar{x}_1)r}{r^3\bar{r}_1^3}+\frac{m_2(\bar{x}-\bar{x}_2)r}{r^3\bar{r}_2^3}\right]\\
&=-\frac{G}{r^2}\left[\frac{m_1(\bar{x}-\bar{x}_1)}{\bar{r}_1^3}+\frac{m_2(\bar{x}-\bar{x}_2)}{\bar{r}_2^3}\right],
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial z}\end{pmatrix}=\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}\\[2mm] \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}}\\[2mm] \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}}\end{pmatrix}, \tag{4.86}$$

其中
$$\bar{V}=\frac{Gm_1}{\bar{r}_1}+\frac{Gm_2}{\bar{r}_2},$$

$$\bar{r}_1^2=(\bar{x}-\bar{x}_1)^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2,$$
$$\bar{r}_2^2=(\bar{x}-\bar{x}_2)^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2,$$

在波动坐标系里$\bar{x}_1$与$\bar{x}_2$是常数,因为

$$\bar{x}_1=x_1/r=\frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos f}\Big/\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

$$= \frac{a_1}{a} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \mu,$$

$$\bar{x}_2 = x_2/r = -\frac{a_2(1 - e^2)}{1 + e\cos f} \Big/ \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos f}$$

$$= -\frac{a_2}{a} = \mu - 1,$$

将(4.85)式代人(4.83)式，并经过一定的整理后得：

$$\left.\begin{aligned} & r\dot{f}^2(\bar{x}'' - 2\bar{y}') + (r\ddot{f} + 2\dot{r}\dot{f})\bar{x}' + (\ddot{r} - r\dot{f}^2)\bar{x} \\ & \qquad - (2\dot{r}\dot{f} + r\ddot{f})\bar{y} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} \\ & r\dot{f}^2(\bar{y}'' + 2\bar{x}') + (r\ddot{f} + 2\dot{r}\dot{f})\bar{y}' + (\ddot{r} - r\dot{f}^2)\bar{y} \\ & \qquad + (2\dot{r}\dot{f} + r\ddot{f})\bar{x} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} \\ & r\dot{f}^2\bar{z}'' + (r\ddot{f} + 2\dot{r}\dot{f})\bar{z}' + \ddot{r}\bar{z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \end{aligned}\right\}, \quad (4.87)$$

径向加速度 $\ddot{r} - r\dot{f}^2 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} = -\frac{r^2\dot{f}^2}{a(1 - e^2)}$ 横向加速度 $2\dot{r}\dot{f} + r\ddot{f} = 0$，故(4.87)式成为

$$\left.\begin{aligned} & r\dot{f}^2(\bar{x}'' - 2\bar{y}') - \frac{r^2\dot{f}^2}{a(1 - e^2)}\bar{x} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} \\ & r\dot{f}^2(\bar{y}'' + 2\bar{x}') - \frac{r^2\dot{f}^2}{a(1 - e^2)}\bar{y} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} \\ & r\dot{f}^2\bar{z}'' + \ddot{r}\bar{z} \qquad\qquad\qquad = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \end{aligned}\right\}, \qquad (4.88)$$

又将 $\ddot{r} = r\dot{f}^2 - \frac{r^2\dot{f}^2}{a(1 - e^2)}$ 代入(4.88)的第三式，并将(4.88)各式乘以 $\frac{1}{r\dot{f}^2}$ 得：

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}'' - 2\bar{y}' &= \frac{1}{r^3\dot{f}^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \frac{r}{a(1 - e^2)}\bar{x} \\ &= \frac{1}{1 + e\cos f}\left(\bar{x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}\right) \end{aligned}\right|$$

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{y}'' + 2\bar{x}' &= \frac{1}{r^2\dot{f}^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{r}{a(1-e^2)}\bar{y} \\
&= \frac{1}{1+e\cos f}\left(\bar{y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}}\right) \\
\bar{z}'' + \bar{z} &= \frac{1}{r^2\dot{f}^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} + \frac{r}{a(1-e^2)}\bar{z} \\
&= \frac{1}{1+e\cos f}\left(\bar{z} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}}\right)
\end{aligned}\right\}, \tag{4.89}
$$

令

$$
\begin{aligned}
\omega = \frac{1}{1+e\cos f}\Big[\frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) \\
+ \frac{1-\mu}{\bar{r}_1} + \frac{\mu}{\bar{r}_2}\Big] - \frac{1}{2}\bar{z}^2
\end{aligned} \tag{4.90}
$$

则(4.89)式可写作:

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{x}'' - 2\bar{y}' &= \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}} \\
\bar{y}'' + 2\bar{x}' &= \frac{\partial \omega}{\partial \bar{y}} \\
\bar{z}'' &= \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}
\end{aligned}\right\} \tag{4.91}
$$

由此可见椭圆型限制性问题的运动方程(4.91)与圆型限制性问题的运动方程(4.58)形式相同.但是由于ω中显含自变量f,雅可比积分不再存在。在波动坐标系里,椭圆限制性三体问题,仍然存在五个平动点 $L_i(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, 0)$. 它们随坐标系一起波动.

§7 平动点附近的运动稳定性

三体问题有五个特解 $L_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$, 其中两个等边三角解, 三个直线解. 本节以圆型限制性三体问题为例讨论小天体在五个平动点 L_i 附近的运动稳定性. 小天体位于五个平动点上时,它始终不离开平动点. 然而, 当它受到摄动而稍微偏离平动

点时情况会怎样呢？ 如果小天体的运动始终保持在平动点附近，我们就说该平动点是稳定的，否则就是不稳定的。

假设平动点的坐标是 (X_i, Y_i, Z_i)，当小天体受摄动后，偏离平动点的位移用 (ξ, η, ζ) 表示，那么小天体的位置应是 $x = x_i + \xi$，$y = Y_i + \eta$，$z = Z_i + \zeta$，将它们代入运动方程(4.58)式，(4.58)式的右端 $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$、$\frac{\partial\Omega}{\partial y}$、$\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ 可以看作 x、y、z 的函数，并将它们在 (X_i, Y_i, Z_i) 点作台劳展开，忽略 ξ、η、ζ 二次幂以上的项便得到如下关于 (ξ, η, ζ) 为变量的运动方程：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= (\Omega_{xx})_i\xi + (\Omega_{xy})_i\eta + (\Omega_{xz})_i\zeta \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= (\Omega_{xy})_i\xi + (\Omega_{yy})_i\eta + (\Omega_{yz})_i\zeta \\ \ddot{\zeta} &= (\Omega_{xz})_i\xi + (\Omega_{zy})_i\eta + (\Omega_{zz})_i\zeta \end{aligned}\right\}, \qquad (4.92)$$

$(\Omega_{xx})_i$、$(\Omega_{xy})_i$ 等表示 Ω 对 x（或 y）两次求导后，令 $x = X_i$，$y = Y_i$，$z = Z_i$ 代入的值，故它们都是常数，(4.92)式是一组常系数线性微分方程，从该方程出发讨论的稳定性是线性稳定性。

由(4.59)式不难得到：

$$\left.\begin{aligned} \Omega_x &= x - \frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-x_2)}{r_2^3} \\ \Omega_y &= y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\ \Omega_z &= -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} \end{aligned}\right\}, \qquad (4.93)$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{xx} &= 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3(1-\mu)(x-x_1)^2}{r_1^5} \\ &\quad + \frac{3\mu(x-x_2)^2}{r_2^5} \\ \Omega_{yy} &= 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2} + \frac{3(1-\mu)y^2}{r_1^5} + \frac{3\mu y^2}{r_2^5} \\ \Omega_{zz} &= -\frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3(1-\mu)}{r_1^5}z^2 + \frac{3\mu}{r_2^5}z^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (4.94)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_{xy} &= 3y\left[\frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_1^5}+\frac{\mu(x-x_2)}{r_2^5}\right]\\
\Omega_{xz} &= 3z\left[\frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_1^5}+\frac{\mu(x-x_2)}{r_2^5}\right]\\
\Omega_{yz} &= 3z\left[\frac{(1-\mu)y}{r_1^5}+\frac{\mu y}{r_2^5}\right]
\end{aligned}\right\}. \tag{4.95}$$

因为五个平动点的 $Z_i=0$，所以由(4.95)的第二、三式得 $(\Omega_{xz})_i=(\Omega_{yz})_i=0$，由(4.94)的第三式得 $(\Omega_{zz})_i=-\left(\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right)<0$，设 $A=\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}>0$。则(4.92)第三式成为

$$\ddot{\zeta}+A\zeta=0, \tag{4.96}$$

(4.96) 式的特征方程为 $\lambda^2+A=0$，有两个特征根 $\lambda_1=is$，$\lambda_2=-is$，(此处 $i=\sqrt{-1}$，s 为大于零的实数)，因为特征根为纯虚数，所以(4.96)式只有周期解，也就是说小天体在平动点沿 z 轴方向作上下振动，这种运动是稳定的。下面我们再讨论小天体在平动点附近，xy 平面上的运动。

方程(4.92)第一、二式的特征方程是：

$$\begin{aligned}
&\lambda^4+(4-(\Omega_{xx})_i-(\Omega_{yy})_i)\lambda^2+(\Omega_{xx})_i(\Omega_{yy})_i\\
&\quad-(\Omega_{xy})_i^2=0
\end{aligned} \tag{4.97}$$

解方程(4.97)，得特征根 λ，若 λ 是纯虚数，则在 xy 平面上，平动点附近的运动是稳定的。下面对直线平动点 L_1、L_2、L_3 和等边三角形顶点 L_4、L_5 附近的运动分别讨论。

1. L_1、L_2、L_3 附近的运动

因为 $y=z=0$，所以由(4.95)式知 $\Omega_{xy}=\Omega_{xz}=\Omega_{yz}=0$，此时 $r_i^2=(x-x_i)^2$，$(i=1,2)$，则由(4.94)得：

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_{xx} &= 1+\frac{2(1-\mu)}{r_1^3}+\frac{2\mu}{r_2^3}>0\\
\Omega_{zz} &= -\left(\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right)<0
\end{aligned}\right\}. \tag{4.98}$$

并且对于 L_1、L_2、L_3 容易证明:

$$\Omega_{yy} = 1 - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) < 0, \qquad (4.99)$$

令 $\lambda^2 = \Lambda$，则(4.97)式可写成:

$$\Lambda^2 + (4 - (\Omega_{xx})_i - (\Omega_{yy})_i)\Lambda + (\Omega_{xx})_i(\Omega_{yy})_i = 0, \quad (4.100)$$

$(i = 1, 2, 3)$，由(4.98)式知 $(\Omega_{xx})_i(\Omega_{yy})_i = -c^2 < 0$，($c$ 为实数)。再令 $\frac{1}{2}(4 - (\Omega_{xx})_i - (\Omega_{yy})_i) = 2b$（$b$ 为实数），方程(4.100)写成:

$$\Lambda^2 + 2b\Lambda - c^2 = 0 \qquad (4.101)$$

方程(4.101)的两个根是:

$$\Lambda_1 = \sqrt{b^2 - c^2} - b > 0$$

$$\Lambda_2 = -\sqrt{b^2 - c^2} - b < 0$$

故得特征根 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\Lambda_1}$，$\lambda_1$ 为正实根，λ_2 为负实根；$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\Lambda_2}$、$\lambda_{3,4}$ 为两个纯虚根。于是方程(4.92)解的形式是:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} + \alpha_4 e^{\lambda_4 t} \\ \eta &= \beta_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 e^{\lambda_2 t} + \beta_3 e^{\lambda_3 t} + \beta_4 e^{\lambda_4 t} \end{aligned}\right\} \qquad (4.102)$$

α、β 为积分常数。所以在平动点 L_1、L_2、L_3 附近小天体的运动是不稳定的或条件稳定的(当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ 时)。

2. L_4、L_5 附近的运动

在 L_4、L_5 点，$r_1 = r_2 = 1$，$x_1 = \mu$，$x_2 = \mu - 1$，$y_1 = y_2 = 0$，$x_i = \mu - \frac{1}{2}$，$y_i = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(i = 4, 5)$，将它们代入(4.94)和(4.95)式得:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{xx} = \frac{3}{4}, \qquad \Omega_{yy} = \frac{9}{4}, \\ &\Omega_{zz} = -1, \quad \Omega_{xy} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right) \\ &\Omega_{xz} = \Omega_{yz} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (4.103)$$

将(4.103)式代入特征方程(4.100)得:

$$\Lambda^2 + \Lambda + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0, \tag{4.104}$$

上式解为

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{1-27\mu(1-\mu)}], \tag{4.105}$$

令

$$d = 1 - 27\mu(1-\mu), \tag{4.106}$$

现在可分以下几种情况讨论:

① $d = 0$, $\mu = \mu_0 = 0.0385209$, 我们称 μ_0 为质量参数 μ 的临界值。

由(4.105)式得 $\Lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$, 于是四个特征根为

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{1,3} &= \pm\sqrt{\Lambda_1} = \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_{2,4} &= \pm\sqrt{\Lambda_2} = \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}, \tag{4.107}$$

上式中 i 为虚单位 $\sqrt{-1}$, λ_1、λ_3 为重根, λ_2、λ_4 为重根, 根据常微分方程理论(4.92)式解的形式是:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (a_1 + a_2 t)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + (a_3 + a_4 t)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ \eta &= (b_1 + b_2 t)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + (b_3 + b_4 t)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{aligned}\right\}, \tag{4.108}$$

a、b 为积分常数。这时小天体在 L_4、L_5 点附近的运动是不稳定的或条件稳定 ($a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = 0$)。

② 当 $0 < \mu < \mu_0$ 时,由(4.106)知 $0 < d < 1$ 所以有:

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{d}) < 0$$

则

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\Lambda_1}, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\Lambda_2}$$

特征根为纯虚数,方程(4.92)存在以下形式的周期解:

$$\left.\begin{aligned}\xi = a_1\cos s_1t + a_2\sin s_1t + a_3\cos s_2t + a_4\sin s_2t \\ \eta = b_1\cos s_1t + b_2\sin s_1t + b_3\cos s_2t + b_4\sin s_2t\end{aligned}\right\} \quad (4.109)$$

上式中 $s_1 = \sqrt{-\Lambda_1}$，$s_2 = \sqrt{-\Lambda_2}$，a 和 b 为积分常数，但它们并不独立。由此可见在这种情况下小天体在 L_4、L_5 附近的运动是稳定的。

③ 当 $\mu_0 < \mu < \frac{1}{2}$ 时，此时(4.106)式中的 $d < 0$，若设 $\sqrt{d} = i\delta$，(i 为虚单位，δ 为正实数)，由(4.105)式得：

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\delta)$$

则

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\Lambda_1} = \pm(\alpha + i\beta) \\ \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\Lambda_2} = \pm(\alpha - i\beta)\end{aligned}\right\}, \quad (4.110)$$

λ_1、λ_3 互为共轭复数，λ_2、λ_4 互为共轭复数，读者不难得到：

$$\left.\begin{aligned}\alpha = \delta/2(1 + 2|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}} \\ \beta = (1 + 2|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}/2\end{aligned}\right\}, \quad (4.111)$$

上式中 $|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{2}}[27\mu(1-\mu)]^{1/4}$。于是方程(4.92)的一般解形式为

$$\left.\begin{aligned}\xi = e^{\alpha t}(a_1\cos\beta t + a_2\sin\beta t) + e^{-\alpha t}(a_3\cos\beta t + a_4\sin\beta t) \\ \eta = e^{\alpha t}(b_1\cos\beta t + b_2\sin\beta t) + e^{-\alpha t}(b_3\cos\beta t + b_4\sin\beta t)\end{aligned}\right\}, \quad (4.112)$$

a、b 为积分常数，一般情况下解(4.112)式是不稳定的，若选择 $a_1 = b_1 = 0$，当 $t \to \infty$ 时 $\xi \to 0$，$\eta \to 0$，这时是渐近稳定的。

第五章 摄动理论

如果一个天体除受主星体的引力作用外，还受到其他力的作用，这时它相对主星体的轨道不再是一个简单的圆锥曲线，它的运动状态比二体问题复杂得多，我们称该天体的运动是一种受摄运动。

在第四章中，我们已经得到了天体 P（质量为 m）相对主星体（质量为 M）的运动方程：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(M+m)\boldsymbol{r}}{r^3} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial R_j}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{4.12}$$

（4.12）式也可以称之为直角坐标表示的摄动方程。（4.12）式右端第一项是主星体的引力加速度。第二项是其他天体的引力加速度，它与第一项比较，在数量上是一个小量，因而把它看作其他天体对 P 的相对主星体运动的一种扰动。在天体力学中习惯地称它为摄动。摄动函数 R_j 是一个标量函数，$\frac{\partial R_j}{\partial \boldsymbol{r}}$ 表示摄动加速度，这表明摄动力为保守力（有势力）。然而，有些摄动力并非保守力，如介质阻力等是明显的耗散力。因此，更一般的直角坐标表示的摄动方程可以写成以下形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{f}, \tag{5.1}$$

上式中 $\boldsymbol{f}$ 表示摄动加速度，它可以是保守力产生的，也可以是耗散力所引起的。在这一章中，我们将建立其他几种常用的天体受摄运动方程，并介绍这些方程的分析解轮廓。在此基础上，介绍大行星和月球的运动概况。

§1 常数变易法和吻切轨道

当摄动加速度 $\boldsymbol{f}=0$ 时，（5.1）式便是一个二体问题的运动

方程，它的解在第二章中已作了详细讨论，有完全的分析解．二体问题中，运动天体的位置和速度可以表示成时间 t 和六个轨道根数 $\sigma_i(i=1,2,\cdots\cdots 6)$ 的函数，即

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t,\sigma_i) \\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t,\sigma_i) \end{array}\right\}. \tag{5.2}$$

当 $\boldsymbol{f}\neq 0$ 时，(5.1)式的解是很复杂的，它没有完全的分析解，在这一节中，我们借用常微分方程的常数易变法来讨论(5.1)式的解法。

如果我们设想(5.1)式的解与(2.3)式的解形式相同，如(5.2)式所表示的，唯一的区别在于这时(5.2)式中的轨道根数不再是常数，而是时间的函数，即

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t,\sigma_i(t)) \\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t,\sigma_i(t)) \end{array}\right\}. \tag{5.3}$$

这就是说，无摄运动的轨道是一个不变的圆锥曲线，而受摄运动的轨道是一个随时间变化的圆锥曲线，因此解方程(5.1)的问题，可以归结为如何确定一个不断随时间变化的圆锥曲线问题．根据这一想法，我们可以考虑建立以轨道根数 σ 为变量的摄动运动方程。

根据(5.3)式，在 t_0 时刻，天体的位置和速度为

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}(t_0,\sigma_i(t_0)) \\ \boldsymbol{v}(t_0)=\boldsymbol{v}(t_0,\sigma_i(t_0)) \end{array}\right\}. \tag{5.4}$$

由(5.4)式可知 t_0 时刻的 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 和 $\boldsymbol{v}(t_0)$ 确定了这一时刻的轨道根数 $\sigma(t_0)$，这条轨道称为 t_0 时刻的瞬时轨道，其轨道面必与 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 和 $\boldsymbol{v}(t_0)$ 共面，轨道曲线必与 $\boldsymbol{v}(t_0)$ 相切，故瞬时轨道也有吻切轨道之称，它随时间 t 不断变化。根据吻切轨道的定义，任何时刻 t，天体的实际位置 $\boldsymbol{r}(t)$ 和速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 应该与该时刻天体在吻切轨道上的位置 $\boldsymbol{r}_0(t)$ 和速度 $\boldsymbol{v}_0(t)$ 相等，即

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0(t) \\ \boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}_0(t) \end{array}\right\}, \tag{5.5}$$

$\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}_0$ 表示天体在吻切轨道上的位置和速度．这表明实际轨道与

吻切轨道时刻相切(如图 5-1).

假想在某一瞬时 t_0, 所有的摄动突然中止,即 $f=0$, 这时天体 P 将按一个圆锥曲线轨道运动,这个轨道由 $r(t_0)$、$v(t_0)$ 所确定. 然而这只是一种假想,真实的情况是 P 按照实际轨道运动,经 δt 时间以后 P 由 P_0 到 P_1, (图 5-11),其坐标 $r(t)$ 的表示式是:

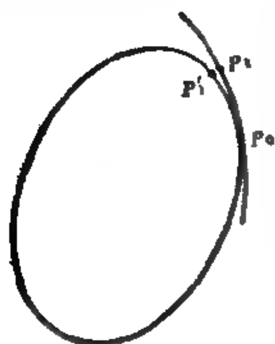


图 5-1

$$r(t)=r(t_0)+\left(\frac{dr}{dt}\right)_0\delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_0\delta t^2+\cdots\cdots, \tag{5.6}$$

假想 P 在密切轨道上运动,经 δt 时间后,由 P_0 位置到 P'_1 的位置,其坐标 $r_0(t)$ 的表示式是:

$$r_0(t)=r_0(t)+\left(\frac{dr_0}{dt}\right)_0\delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2r_0}{dt^2}\right)_0\delta t^2+\cdots\cdots, \tag{5.7}$$

根据(5.5)式, $r(t_0)=r_0(t_0)$ 故(5.6)式与(5.7)式相减后得:

$$r(t)-r_0(t)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_0-\left(\frac{d^2r_0}{dt^2}\right)_0\right]\delta t^2.$$

当 δt 很小时, $\delta t^2\to 0$, 则 $r(t)-r_0(t)=0$, 即

$$\frac{\delta r}{\delta t}=0, \tag{5.8}$$

在实际轨道上,天体速度的表示式为

$$v(t)=v(t_0)+\left(\frac{dv}{dt}\right)_0\delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)_0\delta t^2+\cdots\cdots,$$

在吻切轨道上的速度是:

$$v_0(t)=v_0(t_0)+\left(\frac{dv_0}{dt}\right)_0\delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)_0\delta t^2+\cdots\cdots.$$

以上两式相减,并利用(5.5)式得:

$$v(t) - v_0(t) = \left[\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_0 - \left(\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}\right)_0\right]\delta t$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 - \left(\frac{\mathrm{d}^2v_0}{\mathrm{d}t^2}\right)_0\right]\delta t^2$$

$$\approx \left[\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_0 - \left(\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}\right)_0\right]\delta t \tag{5.9}$$

而
$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = -\frac{G(M+m)r(t_0)}{r^3(t_0)} + F$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^2r_0}{\mathrm{d}t^2}\right) = -\frac{G(M+m)r_0(t_0)}{r_0^3(t_0)}$$

两式相减:

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_0 - \left(\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}\right)_0 = F_0 \tag{5.10}$$

将(5.10)式代入(5.9)式得:

$$v(t) - v_0(t) = F\delta t,$$

即
$$\frac{\delta v}{\delta t} = F. \tag{5.11}$$

§2 以轨道根数为变量的摄动方程

天体的受摄运动方程形式很多，在这一节里介绍以根数为变量的摄动方程的一种基本形式。

基于前一节的讨论，受摄运动的天体的瞬时轨道是一个圆锥曲线，故对某一瞬时而言，二体问题中有关的公式对于有摄运动仍然有效。

我们用算符 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ 表示任意一个变量 A 的总变率，$\frac{\partial A}{\partial t}$ 表示由主星体引力作用引起的 A 的变率，$\frac{\delta A}{\delta t}$ 表示由摄动力引起的 A 的变率，即

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\delta A}{\delta t}. \tag{5.12}$$

下面利用(5.8)、(5.11)和(5.12)式导出以根数 σ 为变量的摄动运动方程。

1. $\frac{da}{dt}$ 和 $\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}$

对活力积分 $v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$ 两端进行 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的运算得:

$$2\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\mu\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial t},$$

即

$$2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}=\frac{\mu}{a^2}\frac{\partial a}{\partial t},$$

故

$$\frac{da}{dt}=\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{2a^2}{\mu}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}. \tag{5.13}$$

在以上的运算中用到(5.8)和(5.9)式。

对动量矩积分 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 两端进行 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的运算得:

$$\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}=\boldsymbol{r}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}. \tag{5.14}$$

2. $\frac{dh}{dt}$、$\frac{di}{dt}$ 和 $\frac{d\Omega}{dt}$

由第二章§2可知:

$$\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h\sin\Omega\sin i\\-h\cos\Omega\sin i\\h\cos i\end{pmatrix}=h\boldsymbol{h}_0,$$

此处

$$\boldsymbol{h}_0=\begin{pmatrix}\sin\Omega\sin i\\-\cos\Omega\sin i\\\cos i\end{pmatrix},$$

则(5.14)式可写成:

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}=\boldsymbol{h}_0\frac{dh}{dt}+h\frac{d\boldsymbol{h}_0}{dt}$$

$$
=\frac{dh}{dt}\begin{pmatrix}\sin\Omega\ \sin i\\ -\cos\Omega\ \sin i\\ \cos i\end{pmatrix}
$$

$$
+h\begin{pmatrix}\cos\Omega\sin i\dfrac{d\Omega}{dt}+\sin\Omega\cos i\dfrac{di}{dt}\\ \sin\Omega\sin i\dfrac{d\Omega}{dt}-\cos\Omega\cos i\dfrac{di}{dt}\\ -\sin i\dfrac{di}{dt}\end{pmatrix},
$$

$$
r\times f=\begin{pmatrix}\cos\Omega & -\sin\Omega\cos i & \sin\Omega\sin i\\ \sin\Omega & \cos\Omega\cos i & -\cos\Omega\sin i\\ 0 & \sin i & \cos i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\sin i\dfrac{d\Omega}{dt}\\ -h\dfrac{di}{dt}\\ \dfrac{dh}{dt}\end{pmatrix},
$$

将上式右端系数矩阵记作Q,不难证明Q为正交阵。即$Q^{-1}=Q^T$。由上式得:

$$
\begin{pmatrix}h\sin i\dfrac{d\Omega}{dt}\\ -h\dfrac{di}{dt}\\ \dfrac{dh}{dt}\end{pmatrix}=Q^{-1}(r\times f)=Q^T(r\times f)
$$

$$
=\begin{pmatrix}\cos\Omega & \sin\Omega & 0\\ -\sin\Omega\cos i & \cos\Omega\cos i & \sin i\\ \sin\Omega\sin i & -\cos\Omega\sin i & \cos i\end{pmatrix}(r\times f). \tag{5.15}
$$

在图(5-2)中,**ON** 表示升交点方向的单位向量,**OM** 是轨道平面上与 **ON** 成 $\frac{\pi}{2}$ 角的一单位向量,即

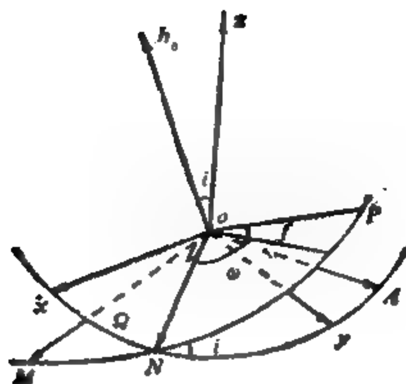


图 5-2

$$ON=\begin{pmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{pmatrix},\tag{5.16}$$

$$OM=\begin{pmatrix}\sin\Omega\quad\cos i\\ -\cos\Omega\quad\cos i\\ -\sin i\end{pmatrix},\tag{5.17}$$

由(5.15)式得：

$$\begin{aligned}h\sin i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=(\cos\Omega,\ \sin\Omega,\ 0)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f})\\&=\boldsymbol{ON}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{ON}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{f}\\&=r\sin(\omega+f)\boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{f},\end{aligned}$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\frac{r}{h}\ \frac{\sin(\omega+f)}{\sin i}\boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{f}.\tag{5.18}$$

又由(5.15)式得：

$$\begin{aligned}h\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}&=(\sin\Omega\cos i,\ -\cos\Omega\cos i,\ -\sin i)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f})\\&=\boldsymbol{OM}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{OM}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{f}\\&=r\cos(\omega+f)\boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{f}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{h}\cos(\omega + f)\boldsymbol{h}_0 \cdot \boldsymbol{f}. \tag{5.19}$$

由 (5.15) 式

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = (\sin\Omega\sin i,\ -\cos\Omega\sin i,\ \cos i)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f})$$

$$= \boldsymbol{h}_0\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}) = \frac{\boldsymbol{h}}{h}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f})$$

$$= \frac{\boldsymbol{r}}{h}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{h}) = \frac{\boldsymbol{r}}{h}\cdot[\boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})]$$

$$= \frac{\boldsymbol{r}}{h}[\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r})]$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{h}[r^2(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})]. \tag{5.20}$$

3. $\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$

因为 $h^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2)$,

所以

$$\mu(1 - e^2)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - 2\mu ae\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = 2h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

将(5.13)和(5.20)式代入上式得:

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu ae}[(ap - r^2)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r})]. \tag{5.21}$$

4. $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$、$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$、$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$

由于 $r = a(1 - e\cos E)$,

所以

$$(1 - e\cos E)\frac{\delta a}{\delta t} + ae\sin E\frac{\delta E}{\delta t} - a\cos E\frac{\delta e}{\delta t}$$

$$- \frac{\delta r}{\delta t} = 0, \tag{5.22}$$

又

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\mu a}\,e\sin E,$$

对上式两端进行 $\frac{\delta}{\delta t}$ 运算后得：

$$e\sqrt{\mu a}\cos E\frac{\delta E}{\delta t}+\sqrt{\mu a}\sin\frac{\delta e}{\delta t}$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}}{2}\frac{e}{\sqrt{a}}\sin E\frac{\delta a}{\delta t}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f},\qquad(5.23)$$

从 (5.22) 和 (5.23) 两式消去 $\frac{\delta e}{\delta t}$ 得：

$$\frac{\delta E}{\delta t}=\frac{1}{ae\sqrt{\mu}}\Big[\sqrt{a}\cos E(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f})$$

$$-\sqrt{\mu}\Big(1-\frac{1}{2}e\cos E\Big)\sin E\frac{\delta a}{\delta t}\Big],$$

再利用(5.13)式得：

$$\frac{\delta E}{\delta t}=\frac{1}{ae\sqrt{\mu}}\Big[\sqrt{a}\cos E(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f})$$

$$-\frac{a\sin F(a+r)}{\sqrt{\mu}}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f})\Big],\qquad(5.24)$$

根据(5.12)式有：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\delta E}{\delta t}=\frac{an}{r}+\frac{\delta E}{\delta t}.$$

由 $p=r(1+e\cos f)$ 得：

$$re\sin f\frac{\delta f}{\delta t}=r\cos f\frac{\delta e}{\delta t}-\frac{\delta p}{\delta t},\qquad(5.25)$$

又因为 $$\sqrt{p}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=\sqrt{\mu}\,re\sin f,$$

所以

$$\sqrt{\mu}\,re\cos f\frac{\delta f}{\delta t}=\frac{1}{2\sqrt{p}}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\delta p}{\delta t}$$

$$-\sqrt{\mu}\, r\sin f\,\frac{\partial e}{\partial t}+\sqrt{p}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}_{\circ} \tag{5.26}$$

(5.25) 和 (5.26) 消去 $\frac{\partial e}{\partial t}$ 得:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{re}\left[\frac{p}{h}\cos f(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f})-\frac{p+r}{h}\sin f\,\frac{\partial h}{\partial t}\right],$$

将(5.20)式代入上式得:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{re\sqrt{\mu p}}\left[p\cos f+\left(1+\frac{r}{p}\right)er\sin^{2} f\right](\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f})-\frac{r}{\mu e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f})。 \tag{5.27}$$

由(5.12)式

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{h}{r^{2}}+\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^{2}}+\frac{\partial f}{\partial t}。 \tag{5.28}$$

因为 $E-e\sin E=M$,

所以

$$\frac{\partial M}{\partial t}=(1-e\cos E)\frac{\partial E}{\partial t}-\sin E\,\frac{\partial e}{\partial t},$$

将 (5.21) 和 (5.24) 代入上式得:

$$\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\cos E-e}{e\sqrt{\mu a}}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f})-\frac{\sin E}{e\mu}(r+p)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}), \tag{5.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial t}=n+\frac{\partial M}{\partial t}。 \tag{5.30}$$

5. $\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t}$

对于无摄运动,我们定义:

$$M=n(t-\tau)=n(t-t_0)+M_0。 \tag{5.31}$$

这里 $M_0=n(t_0-\tau)$ 是代替积分常数 τ 的。它表示初始时刻 t_0 的平近点角。由于 $n=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$，因此 n 是 a 的函数，在求摄动函

数对 a 的偏导数时将会出现复合函数求导数的一项 $\frac{\partial \kappa}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial a}$, 为避免这一点，在摄动理论里，我们重新定义：

$$M=\int n\mathrm{d}t+M_0', \tag{5.32}$$

这里的 n 直接看作是时间 t 的函数， M_0' 是代替 τ 的一个积分常数，由于

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n+\frac{\mathrm{d}M_0'}{\mathrm{d}t}, \tag{5.33}$$

将(5.33)与(5.30)比较，并且将 M_0' 仍记作 M_0，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\delta M}{\delta t}=&\frac{\cos E-e}{e\sqrt{a\mu}}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f})\\&-\frac{\sin E}{e\mu}(r+p)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}).\end{aligned} \tag{5.34}$$

6. $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

由图(5-2)知

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{ON}=r\cos(\omega+f).$$

所以
$$-r\sin(\omega+f)\left(\frac{\delta\omega}{\delta t}+\frac{\delta f}{\delta t}\right)=\boldsymbol{r}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{ON}}{\delta t}. \tag{5.35}$$

而

$$\frac{\delta\boldsymbol{ON}}{\delta t}=\begin{pmatrix}-\sin\Omega\\ \cos\Omega\\ 0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{OA}\cdot\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},$$

上式中单位向量

$$\boldsymbol{OA}=\begin{pmatrix}-\sin\Omega\\ \cos\Omega\\ 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{Oz}\times\boldsymbol{ON}, \tag{5.36}$$

故

$$\frac{\delta\boldsymbol{ON}}{\delta t}=(\boldsymbol{Oz}\times\boldsymbol{ON})\cdot\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}, \tag{5.37}$$

(5.37)代入(5.35)得：

$$r\sin(\omega+f)\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)=-\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{Oz}\times\boldsymbol{ON})\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$$

$$=-r\sin(\omega+f)\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{5.38}$$

上式中的 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 已有(5.27)式表示。

§3 摄动加速度以直角坐标分量表示的摄动方程

将§2节导出的摄动方程总结为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\frac{2a^2}{\mu}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\mu ae}[(ap-r^2)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F})+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F})]\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}&=\frac{r}{h}\cos(\omega+f)\boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{F}\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{r}{h}\frac{\sin(\omega+f)}{\sin i}\boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{F}\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}&=-\frac{r}{h}\operatorname{ctg} i\sin(\omega+f)\boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{F}\\
&\quad-\frac{1}{re\sqrt{\mu p}}\left[p\cos f+\left(1+\frac{r}{p}\right)re\sin^2 f\right]\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}\\
&\quad+\frac{r}{\mu e}\sin f\left(1+\frac{r}{p}\right)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F})\\
\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t}&=\frac{\cos E-e}{e\sqrt{\mu a}}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F})-\frac{\sin E}{\mu e}(r+p)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}).
\end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

将摄动加速度 f 分解径向分量 S，横向分量 T，轨道平面的法向分量 W 表示，即

$$f = S r_0 + T \theta_0 + W h_0. \tag{5.40}$$

r_0 和 θ_0 表示径向和横向方向的单位向量。将速度 v 也作同样方向的分解：

$$v = \dot{r} r_0 + r\dot{f} \theta_0 \tag{5.41}$$

因此有：

$$\left.\begin{aligned}
& r \cdot f = rS \\
& v \cdot f = \dot{r}S + r\dot{f}T = \frac{\sqrt{\mu e}\sin f}{\sqrt{p}} S + \frac{\sqrt{\mu p}}{r} T \\
& h_0 \cdot f = W \\
& r \cdot v = \frac{re\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} \sin f
\end{aligned}\right\}, \tag{5.42}$$

将(5.42)式代入(5.39)式便得摄动加速度以（S, T, W）表示的摄动方程：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}}\left(e\sin fS + \frac{p}{r}T\right) \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{\mu}\sin fS + \frac{\sqrt{\mu p}}{\mu}(\cos f + \cos E)T \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\cos(\omega + f)W \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\frac{\sin(\omega + f)}{\sin i}W \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\sqrt{\mu p}}{e\mu}\cos fS + \frac{\sqrt{\mu p}}{e\mu}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin fT \\
&\quad - \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\operatorname{ctg} i\sin(\omega + f)W \\
\frac{dM_0}{dt} &= \frac{p}{e\sqrt{a\mu}}\left[\left(\cos f - \frac{2er}{p}\right)S - \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin fT\right]
\end{aligned}\right\}. \tag{5.43}$$

以上方程的推导运算较繁，并且要用到 E 和 f 的以下关系式：

$$
\left.\begin{aligned}
&\cos E - e = \frac{r}{a}\cos f \\
&\sin f = \frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\sin E \\
&\cos E - \frac{ae}{r}\sin^2 E = \cos f
\end{aligned}\right\}。 \tag{5.44}
$$

(5.43) 式的推导举例如下：

由(5.39)式得：

$$
\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\cos E - e}{e\sqrt{a\mu}}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}) - \frac{\sin E}{\mu e}(r+p)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}),
$$

将(5.42)式代入上式

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t} &= \frac{\cos E - e}{e\sqrt{\mu a}}rS - \frac{\sin E}{e\mu}(r+p) \\
&\qquad \times\left[\frac{e\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}\sin fS + \frac{\sqrt{\mu p}}{r}T\right] \\
&= \left[\frac{\cos E - e}{e\sqrt{a\mu}}r - \frac{(r+p)}{\sqrt{\mu p}}\sin E\sin f\right]S \\
&\qquad - \frac{(r+p)\sqrt{\mu p}}{re\mu}\sin ET,
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

上式中 S 项的系数为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos E - e}{e\sqrt{\mu a}}r - \frac{r+p}{\sqrt{\mu p}}\sin E\sin f \\
&\quad = \frac{r^2\cos f}{ae\sqrt{\mu p}} - \frac{r+p}{\sqrt{\mu p}}\frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\sin^2 E \\
&\quad = \frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left[\frac{r^2}{ap}\cos f - \frac{r+p}{p}\frac{ae}{r}\sin^2 E\right] \\
&\quad = \frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left[\frac{r^2}{ap}\cos f + \frac{r+p}{p}(\cos f - \cos E)\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left[\frac{r^2}{ap}\cos f + \left(1+\frac{r}{p}\right)\cos f - \left(1+\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r}{a}\cos f + e\right)\right]$$

$$= \frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left[\cos f + r\cos f\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right) - e\left(1+\frac{r}{p}\right)\right]$$

$$= \frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left[\cos f - \frac{2re}{p}\right],$$

(5.45) 式右端 T 项的系数为

$$-\frac{(r+p)\sqrt{\mu p}}{re\mu}\sin E = \frac{-(r+p)\sqrt{\mu p}}{\mu a e\sqrt{1-e^2}}\sin f = -\frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left(\cos f - \frac{2re}{p}\right)S - \frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f T = \frac{p}{e\sqrt{\mu a}}\left[\left(\cos f - \frac{2re}{p}\right)S - \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f T\right].$$

将摄动加速度分解成切向分量 U，法向分量 N 和轨道面法向分量 W 表示，即

$$\boldsymbol{f} = U\boldsymbol{u}_0 + N\boldsymbol{n}_0 + W\boldsymbol{h}_0, \tag{5.46}$$

$\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{n}_0$ 分别表示切向和法向的单位向量.将 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 作同样的分解：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r\cos\alpha\boldsymbol{u}_0 - r\sin\alpha\boldsymbol{n}_0 \\ \boldsymbol{v} &= v\boldsymbol{u}_0 \end{aligned}\right\}, \tag{5.47}$$

α是 r 和 v 之夹角，由于

$$\left.\begin{aligned} v\cos\alpha &= \dot{r} \\ v\sin\alpha &= r\dot{f} \end{aligned}\right\}。 \tag{5.48}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\dot{r}}{v} = \frac{\sqrt{\mu}\,e\sin f}{v\sqrt{p}} \\ \sin\alpha &= \frac{r\dot{f}}{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{vr} \end{aligned}\right\}。 \tag{5.49}$$

(5.49)式代入(5.47)式得：

$$\boldsymbol{r} = \frac{\sqrt{\mu}\,re\sin f}{v\sqrt{p}}\boldsymbol{u}_0 - \frac{\sqrt{\mu p}}{v}\boldsymbol{n}_0,$$

则有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f} &= \frac{\sqrt{\mu}\,re\sin f}{v\sqrt{p}}U - \frac{\sqrt{\mu p}}{v}N \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} &= vU \\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} &= \frac{\sqrt{\mu}\,re}{\sqrt{p}}\sin f \\ \boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{f} &= W \end{aligned}\right\}。 \tag{5.50}$$

(5.50)式代入(5.39)得摄动加速度以（U，N，W）表示的摄动方程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{\mu}vU \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{v}[2(\cos f + e)]U - \frac{r}{av}\sin fN \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\cos(\omega + f)W \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\frac{\sin(\omega + f)}{\sin i}W \end{aligned}\right\} \tag{5.51}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{ev}\left[2\sin f U + (\cos E + e)N\right] \\
&\quad - \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\sin(\omega + f)\operatorname{ctg} i W \\
\frac{dM_0}{dt} &= -\frac{1}{ev\sqrt{1-e^2}}\left[2\sin f(1 - e^2\cos E)U\right. \\
&\quad \left. + \frac{rp}{a^2}\cos f N\right]
\end{aligned}
\right\}.
$$

推导(5.51)式的举例：

将(5.50)式代入(5.18)式，则

$$
\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\frac{\sin(\omega + f)}{\sin i}W, \tag{5.52}
$$

将(5.50)代入(5.27)式，则

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta f}{\delta t} &= \frac{1}{re}\left[\sqrt{p}\cos f + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{re\sin^2 f}{\sqrt{p}}\right] \\
&\quad \times \left[\frac{re}{v\sqrt{p}}\sin f U - \frac{\sqrt{p}}{v}N\right] \\
&\quad - \frac{r}{\mu e}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin f v U,
\end{aligned}
$$

上式右端 U 项合并后的系数是：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin f}{ev}\left[e\cos f + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{re^2\sin^2 f}{p} - \frac{rv^2}{\mu}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\right] \\
&= \frac{\sin f}{ev}\left\{e\cos f + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{r}{p}\left[e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2\right]\right. \\
&\quad \left. - r\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{r}{p}\right)\right\} \\
&= \frac{\sin f}{ev}\left\{\frac{p}{r} - 1 - \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{p}{r}\right\} \\
&= -\frac{2\sin f}{ev},
\end{aligned}
$$

N 项的系数是：

$$
-\frac{\sqrt{p}}{rev}\left[\sqrt{p}\cos f+\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{re}{\sqrt{p}}\sin^2 f\right]
$$

$$
=-\frac{1}{ev}\left[\cos f+e+\frac{ae}{r}\sin E\right]
$$

$$
=-\frac{1}{ev}(\cos E+e),
$$

所以

$$
\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{1}{ev}[2\sin fU+(\cos E+e)N]. \tag{5.53}
$$

则

$$
\frac{d\omega}{dt}=-\cos i\frac{d\Omega}{dt}-\frac{\partial f}{\partial t}
$$

$$
=\frac{1}{ev}[2\sin fU+(\cos E+e)N]
$$

$$
-\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\sin(\omega+f)\operatorname{ctg} iW.
$$

§4 拉格朗日行星运动方程

在很多情况下，摄动力是保守力，因此摄动加速度可以用摄动函数对坐标的偏导数表示，即 $\boldsymbol{f}=\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}}$，而坐标 $\boldsymbol{r}$ 又是轨道根数 σ_i 的函数 $\boldsymbol{r}(t,\sigma_i)$ 故 R 对坐标的偏导数可转换成 R 对轨道根数的偏导数 $\frac{\partial R}{\partial \sigma_i}$ 表示，拉格朗日行星运动方程就是摄动加速度以摄动函数对轨道根数的偏导数表示的一种摄动方程。

当根数 σ_i 有 $\delta\sigma_i$ 变化时，引起摄动函数 R 的变化是：

$$
\delta R=\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial R}{\partial \sigma_i}\delta\sigma_i \tag{5.54}
$$

从另一角度看，$\delta\sigma_i$ 引起坐标 $\boldsymbol{r}$ 的变化 $\delta\boldsymbol{r}$，从而再引起 R 的变化，即

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{r} \tag{5.55}$$

值得提醒的是 $\delta\boldsymbol{r}$ 并非由于时间 t 的变化所引起的.它的意义相当于分析力学中的虚位移,于是(5.55)式右端 $\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{r}$ 的意义是单位质量的虚功。根据(5.40)式

$$\boldsymbol{f} = S\boldsymbol{r}_0 + T\boldsymbol{\theta}_0 + W\boldsymbol{h}_0 \tag{5.40}$$

将 $\delta\boldsymbol{r}$ 作同样方向的分解,

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta r\boldsymbol{r}_0 + r\delta\theta\boldsymbol{\theta}_0 + r\delta\varphi\boldsymbol{h}_0 \tag{5.56}$$

这里 θ 和 φ 是以轨道平面为基本面的经度角和纬度角. 由(5.40)和(5.56)式得:

$$\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{r} = S\delta r + Tr\delta\theta + Wr\delta\varphi \tag{5.57}$$

经度角 θ 和纬度角 φ 位移的矢量表示是 $\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta\boldsymbol{h}_0$, 和 $\delta\boldsymbol{\varphi} = -\delta\varphi\boldsymbol{\theta}_0$ 见图(5-3),当 i、$\omega+f$、Ω 有变化 δi、$\delta\Omega$、$\delta(\omega+f)$ 时,

图 5-3

引起 θ、φ 的变化是:

$$\begin{aligned}\delta\theta &= \delta i\boldsymbol{ON}\cdot\boldsymbol{h}_0 + \delta\Omega\boldsymbol{OZ}\cdot\boldsymbol{h}_0 + \delta(\omega+f)\boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{h}_0\\ &= \delta\Omega\cos i + \delta\omega + \delta f.\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= -\delta i\boldsymbol{ON}\cdot\boldsymbol{\theta}_0 - \delta\Omega\boldsymbol{Oz}\cdot\boldsymbol{\theta}_0 - \delta(\omega+f)\boldsymbol{h}_0\cdot\boldsymbol{\theta}_0\\ &= \delta i\sin(\omega+f) - \delta\Omega\cos(\omega+f)\sin i.\end{aligned} \tag{5.59}$$

(5.58)和(5.59)式中的 δf 需用 $\delta\sigma_i$ 表示。根据

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

两端取对数:

$$\ln\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\frac{1}{2}\ln(1+e)-\frac{1}{2}\ln(1-e)+\ln\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

对上式作微分运算

$$\frac{1}{2}\frac{\sec^2\frac{f}{2}}{\operatorname{tg}\frac{f}{2}}\delta f=\frac{1}{2}\frac{1}{1+e}\delta e$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e}\delta e+\frac{1}{2}\frac{\sec^2\frac{E}{2}}{\operatorname{tg}\frac{E}{2}}\delta E,$$

即

$$\frac{\delta f}{\sin f}=\frac{\delta e}{1-e^2}+\frac{\delta E}{\sin E},$$

所以

$$\delta f=\frac{\sin f}{1-e^2}\delta e+\frac{\sin f}{\sin E}\delta E。\tag{5.60}$$

又从

$$E-e\sin E=M,$$

得:

$$\delta E=\frac{1}{1-e\cos E}(\delta M+\sin E\delta e)$$

$$=\frac{a}{r}(\delta M+\sin E\delta e),\tag{5.61}$$

将上式代入(5.60)式

$$\delta f=\left(\frac{\sin f}{1-e^2}+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\sin E\right)\delta e+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\delta M$$

$$=\frac{\sin f}{1-e^2}\left(1+\frac{p}{r}\right)\delta e+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\delta M。\tag{5.62}$$

(5.62)式代入(5.58)式，则

$$\delta\theta = \cos i\delta\Omega + \delta\omega + \frac{\sin f}{1-e^2}\left(1+\frac{p}{r}\right)\delta e + \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\delta M. \tag{5.63}$$

又因为

$$r = a(1 - e\cos E),$$

所以

$$\delta r = (1 - e\cos E)\delta a + ae\sin E\delta E - a\cos E\delta e,$$

利用(5.61)式

$$\begin{aligned}\delta r &= \frac{r}{a}\delta a - a\cos E\delta e + \frac{a^2 e\sin E}{r}(\delta M + \sin E\delta e)\\&= \frac{r}{a}\delta a + \frac{a^2 e}{r}\sin E\delta M + \left(\frac{a^2 e}{r}\sin^2 E - a\cos E\right)\delta e\\&= \frac{r}{a}\delta a + \frac{a^2 e}{r}\sin E\delta M - a\cos f\delta e.\end{aligned} \tag{5.64}$$

将(5.59)、(5.63)、(5.64)一起代入(5.56)后，再代入(5.55)便得：

$$\begin{aligned}\delta R = \frac{rS}{a}\delta a &+ \left[\frac{r\sin f}{1-e^2}\left(1+\frac{p}{r}\right)T - a\cos f\cdot S\right]\delta e\\&+ r\sin(\omega+f)W\delta i\\&+ [r\cos iT - r\sin i\cos(\omega+f)W]\delta\Omega\\&+ \left[\frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}S + \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r}T\right]\delta M.\end{aligned} \tag{5.65}$$

(5.54)与(5.65)式的右端应相等，而 δa、δe、$\delta i\cdots$ 等为独立变化，故有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a}S\\&\frac{\partial R}{\partial e} = a\sin f\left(1+\frac{r}{p}\right)T - a\cos fS\\&\frac{\partial R}{\partial i} = r\sin(\omega+f)W\end{aligned}\right\}. \tag{5.66}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= r\cos iT - r\sin i\cos(\omega+f)W \\
\frac{\partial R}{\partial M} &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(e\sin fS+\frac{p}{r}T\right) \\
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= rT
\end{aligned}\right|
$$

(5.66) 式表示 $\frac{\partial R}{\partial \sigma_i}$ 与加速度分量 S、T、W 之关系。在以上的推导过程中我们直接将 M 作为一轨道根数，这也是允许的，不过从 (5.32) 式看，$\frac{\partial}{\partial M}=\frac{\partial}{\partial M_0}$ 故 (5.66) 中的 $\frac{\partial R}{\partial M}$ 也可以由 $\frac{\partial R}{\partial M_0}$ 代替。利用(5.66)和(5.43)式不难推导出拉格朗日行星运动方程：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M_0} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M_0}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\operatorname{ctg} i\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\operatorname{ctg} i\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{dM_0}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right\}。\tag{5.67}
$$

(5.67) 式推导的举例如下：

由(5.43)式

$$
\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\sqrt{\mu p}}{e\mu}\cos fS+\frac{\sqrt{\mu p}}{e\mu}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin fT
$$

$$
-\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\operatorname{ctg} i\sin(\omega+f)W
$$

$$= \frac{\sqrt{\mu p}}{ae\mu}\left[a\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin fT - a\cos fS\right]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r \operatorname{ctg} i \sin(\omega + f) W.$$

利用(5.66)式得:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{ae\mu}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{1}{\sqrt{\mu p}}\operatorname{ctg} i\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\operatorname{ctg} i\frac{\partial R}{\partial i},$$

由(5.43)式

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{\mu}\sin fS + \frac{\sqrt{\mu p}}{\mu}(\cos f + \cos E)T$$

$$= \frac{\sqrt{\mu p}}{\mu}\sin fS + \frac{\sqrt{\mu p}}{\mu e}(e\cos f + e\cos E)T$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{e\sqrt{\mu}}\left(e\sin fS + \frac{p}{e}T - \frac{r}{a}T\right),$$

利用(5.66)式

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{p}}{e\sqrt{\mu}}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{1}{a}\frac{\partial R}{\partial \omega}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{1}{a}\frac{\partial R}{\partial \omega}\right)$$

$$= \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \omega}.$$

关于$\frac{da}{dt}$、$\frac{d\Omega}{dt}$等其它方程,读者可自己推导.

在行星和卫星运动理论中也常用以下一组轨道根数:

$$a、e、i、\Omega、\tilde{\omega}、\varepsilon_0.$$

其中

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega,$$

$$\varepsilon_0 = \tilde{\omega} + M_0 = \Omega + \omega + M_0.$$

$\tilde{\omega}$ 称为近日点的平黄经，ε_0 称为历元时刻的平黄经，这两个根数代替 ω 和 M_0。原来摄动函数是 a、e、i、Ω、ω、M_0 的函数，即原有 $R(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$ 引入新的轨道根数后则有：

$$R = R(a, e, i, \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon_0),$$

将方程(5.67)中 $\frac{\partial R}{\partial M_0}$、$\frac{\partial R}{\partial \omega}$、$\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ 等替换成 $\frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0}$、$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\omega}}$ $\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega}$ 的形式，它们的关系是：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0}\cdot\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\omega}}\cdot\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \omega} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\omega}} \\
\frac{\partial R}{\partial M_0} &= \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0}\cdot\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial M_0} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0} \\
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0}\cdot\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \Omega} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\omega}}\cdot\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \Omega} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\omega}}
\end{aligned}\right\}. \tag{5.68}$$

利用(5.68)式、(5.67)式可写成新轨道根数表示的形式（按习惯，将 $\bar{R}$ 仍记为 R）

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}\right) \\
&\quad - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right\}. \tag{5.69}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\varepsilon_0}{\mathrm{d}t} = & -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} \\
& -\frac{(1-e^2)-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right\}
$$

从(5.69)式可以看出，当偏心率 e 很小以至趋于零时，$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t}$ 两个方程将出现奇点，这时可以通过以下的变量置换来消除奇点。

令 $\qquad k = e\cos\tilde{\omega}, \qquad h = e\sin\tilde{\omega},$

新参数 k、h 代替 e、$\tilde{\omega}$，则有

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial e} &= \cos\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial k}+\sin\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial h} \\
\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} &= -e\sin\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial k}+e\cos\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial h}
\end{aligned}\right\}, \tag{5.70}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \cos\tilde{\omega}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-e\sin\tilde{\omega}\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \sin\tilde{\omega}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+e\cos\tilde{\omega}\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\}, \tag{5.71}
$$

将(5.69)式代入上式得：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = & -\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2(\sqrt{1-h^2-k^2}+1)}h\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \\
& +\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-h^2-k^2}}k\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial k} \\
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = & -\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2(\sqrt{1-h^2-k^2}+1)}k\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \\
& -\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-h^2-k^2}}h\frac{\partial R}{\partial i}-\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial h}
\end{aligned}\right\}. \tag{5.72}
$$

如果倾角 i 为小量，$\frac{d\Omega}{dt}$、$\frac{di}{dt}$ 两方程将出现奇点，引入 p、q 代替 i、Ω，它们之间的变换关系为

$$p = \sin i \sin\Omega, \qquad q = \sin i \cos\Omega,$$

则

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i} &= \cos i \sin\Omega \frac{\partial R}{\partial p} + \cos i \cos\Omega \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \sin i \cos\Omega \frac{\partial R}{\partial p} - \sin i \sin\Omega \frac{\partial R}{\partial q} \end{aligned}\right\}, \tag{5.73}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \sin i \cos\Omega \frac{d\Omega}{dt} + \cos i \sin\Omega \frac{di}{dt} \\ \frac{dq}{dt} &= -\sin i \sin\Omega \frac{d\Omega}{dt} + \cos i \cos\Omega \frac{di}{dt} \end{aligned}\right\}. \tag{5.74}$$

(5.69) 代入上式后得：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}\cdot p}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-p^2-q^2})}\left(\frac{\partial R}{\partial \tilde\omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}\right) \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}\,q}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-p^2-q^2})}\left(\frac{\partial R}{\partial \tilde\omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{5.75}$$

§5 摄动方程的分析解概要

前面几节我们介绍了几种形式的摄动方程，它们是一组很复杂的非线性微分方程，不能找到完全的分析解，而只能用一组级数解，作为分析解的近似。在这一节中将介绍如何求级数解。

无论摄动方程形式多么复杂，摄动加速度 $f\left(\text{或}\ \dfrac{\partial R}{\partial \sigma_i}\right)$ 与主星体的引力加速度相比总是小量，或者说以轨道根数为变量的摄动方程如(5.69)式的右端总含有一个小因子，于是它们可写成：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\mathrm{d}t}=\varepsilon F_i(\sigma, t) \tag{5.76}$$

的形式，其中 ε 为小因子，称为摄动因子，当 $\varepsilon=0$ 时，σ_i 为常数，即二体问题的解．从(5.76)式看出 σ_i 是 ε 的函数，因此 $F_i(\sigma, t)$ 也是 ε 的函数，为了求(5.76)的级数解，将 $F_i(\sigma, t)$ 在 $\varepsilon=0$ 点作台劳展开，

$$\begin{aligned}F_i(\sigma, t)=F_{i0}&+\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}\right)_0\varepsilon+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varepsilon^2}\right)_0\varepsilon^2\\&+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F_i}{\partial \varepsilon^3}\right)_0\varepsilon^3+\cdots,\end{aligned} \tag{5.77}$$

将(5.77)代入(5.76)式得：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\mathrm{d}t}=\varepsilon F_{i0}&+\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}\right)_0\varepsilon^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varepsilon^2}\right)_0\varepsilon^3\\&+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F_i}{\partial \varepsilon^3}\right)_0\varepsilon^4+\cdots,\end{aligned} \tag{5.78}$$

上式中 F_{i0} 和 $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}\right)_0$ 等表示 F_i 和 $\dfrac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}$ 中的 σ 用无摄运动的 $\sigma^{(0)}$ 代入．解(5.78)时若右端只取 ε 的一次幂，所得之解称为一阶摄动解，此时摄动方程：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\mathrm{d}t}=\varepsilon F_{i0}$$

积分得：

$$\sigma_i=\sigma_i^{(0)}+\varepsilon\int_{t_0}^{t}F_{i0}\mathrm{d}t \tag{5.79}$$

其中 $\sigma_i^{(0)}$ 为 t_0 时刻的瞬时轨道根数．从(5.79)式可知若只要求准确到一阶摄动，则摄动方程的解可直接积分得到，积分时摄动方程右端的轨道根数可当作常数（t_0 时刻的瞬时轨道根数）。

假如(5.78)式右端取到ε^2项,积分后得到二阶摄动的解是:

$$\sigma_i = \sigma_i^{(0)} + \varepsilon\int_{t_0}^{t} F_{i0}dt + \varepsilon^2\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt, \tag{5.80}$$

同理可以得到更高阶的摄动. 如果把 ε、ε^2、ε^3··· 等项的系数记作 $\sigma_i^{(1)}$、$\sigma_i^{(2)}$、$\sigma_i^{(3)}$···, 即

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} F_{i0}dt = \sigma_i^{(1)}\\
&\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}\right)_0 dt = \sigma_i^{(2)}\\
&\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 dt = \sigma_i^{(3)}\\
&\cdots
\end{aligned}\right\}, \tag{5.81}$$

则摄动方程的级数解形式为

$$\sigma_i = \sigma_i^{(0)} + \varepsilon\sigma_i^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_i^{(2)} + \varepsilon^3\sigma_i^{(3)} + \cdots. \tag{5.82}$$

根据已知函数 F_i, 通过(5.81)式, (5.82)式中幂级数的系数总可以求得. 只是当摄动因子 ε 较大时(5.82)式的收敛性差, 故必须求高阶摄动, 这时具体的公式推导较烦. 级数解常用于大行星运动理论,对于那些大偏心率,大倾角的小行星运动用级数解效果较差,有的以致完全不能用.

§6 大行星运动

大行星是天体力学中最早的研究对象,早在18世纪由于航海事业的发展, 人们需要精确确定月球、大行星等太阳系天体的位置, 拉格朗日最先较完整地建立了大行星的运动理论. 大行星运动理论是根据大行星运动的特点确定行星运动方程的近似解.

行星的质量与太阳的质量相比是极小的量, 因此在确定某一行星的运动时,太阳可作为主星体, 其他行星作为摄动体, 它们的质量作为摄动因子. 以三体系统为例,设太阳的质量为 M_0, 两个行星的质量分别为 m_1、m_2, 它们两组轨道根数分别用 u_1、u_2······

u_6 和 v_1、v_2……v_6 表示,根据拉格朗日行星运动方程(5.69),两个行星的运动方程可以写成:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}&=m_2F_i(u,v,t)\\ \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}&=m_1G_i(u,v,t)\end{aligned}\right\}\tag{5.83}$$

$$(i=1,2,\cdots,6)$$

的形式。(5.83)式右端 F、G 的具体表达式即为(5.69)式的右端函数。因为 m_1、$m_2\ll M_\odot$,故 m_1、m_2 可作为摄动因子。用二元函数的台劳展开,将 F_i、G_i 在 $m_1=m_2=0$ 处作展开,得:

$$\left.\begin{aligned}F_i=&(F_i)_0+m_1\left(\frac{\partial F_i}{\partial m_1}\right)_0+m_2\left(\frac{\partial F_i}{\partial m_2}\right)_0+\frac{1}{2}m_1^2\left(\frac{\partial F_i}{\partial m_1}\right)_0\\&+\frac{1}{2}m_2^2\left(\frac{\partial F_i}{\partial m_2}\right)_0+m_1m_2\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial m_1\partial m_2}\right)_0+\cdots\\ G_i=&(G_i)_0+m_1\left(\frac{\partial G_i}{\partial m_1}\right)_0+m_2\left(\frac{\partial G_i}{\partial m_2}\right)_0+\frac{1}{2}m_1^2\left(\frac{\partial G_i}{\partial m_1}\right)_0\\&+\frac{1}{2}m_2^2\left(\frac{\partial G_i}{\partial m_2}\right)+m_1m_2\left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial m_1\partial m_2}\right)_0+\cdots\end{aligned}\right\}。\tag{5.84}$$

将(5.84)式代入(5.83)并对 t 积分得:

$$\left.\begin{aligned}u_i=&u_i^{(0)}+m_2\int_{t_0}^{t}(F_i)_0\mathrm{d}t+m_1m_2\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial m_1}\right)_0\mathrm{d}t\\&+m_2^2\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial m_2}\right)_0\mathrm{d}t+O(m^3)\\ v_i=&v_i^{(0)}+m_1\int_{t_0}^{t}(G_i)_0\mathrm{d}t+m_1m_2\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial G_i}{\partial m_2}\right)\mathrm{d}t\\&+m_1^2\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial G_i}{\partial m_1}\right)_0\mathrm{d}t+O(m^3)\end{aligned}\right\}。\tag{5.85}$$

这里 $u_i^{(0)}$、$v_i^{(0)}$ 表示 t_0 时刻的轨道根数,即无摄运动的根数,$(F_i)_0$、$(G_i)_0$、$\left(\frac{\partial F_i}{\partial m_1}\right)_0$、$\left(\frac{\partial G_i}{\partial m_2}\right)_0$……等中右下角标零表示这些表示

式中的行星轨道根数用初始值 $\sigma_i^{(0)}$、$\sigma_j^{(0)}$ 代入。

在(5.85)式中，右端若只取前两项，便得到行星运动的一阶摄动解，也就是说在拉格朗日行星运动方程中，右端出现的轨道根数用常数(初值)代入积分便得一阶摄动解．积分时，首要的问题是必须将摄动函数 R 表示成时间(或相当于时间的变量)的显函数的形式．利用行星轨道的小偏心率和小倾角，可将摄动函数 R 展开成平近点角 M 的三角级数，其形式是

$$R = A_0 + \sum A_1 \cos D, \tag{5.86}$$

其中

$$D = (kn + k'n')t + k\varepsilon_0 + k'\varepsilon_0' + A_2, \tag{5.87}$$

上面公式中 A_0 是两个行星的轨道根数 a、e、i、$\tilde{\omega}$、Ω 的函数，A_1 是两行星轨道根数 a、e、i、Ω 的函数并含有摄动行星的质量 m_2 或 (m_1)，A_2 是轨道根数 i、Ω、$\tilde{\omega}$ 的函数．n、n' 代表两个行星的平均运动，k 和 k' 为任意整数．

关于摄动函数的展开问题是一个烦杂的课题，读者若有兴趣可参考有关书籍．

现在以 $\frac{da}{dt}$、$\frac{de}{dt}$ 两个方程为例，具体分析行星运动的一阶摄动解．

由(5.86)和(5.87)式有

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} = -\sum A_1 \sin D \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_0} = -\sum A_1 k \sin D,$$

将上式代入(5.69)式得：

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} = -\frac{2}{na}\sum A_1 k \sin D,$$

积分上式得：

$$a = a_0 + \frac{2}{na}\sum \frac{A_1 k}{kn + k'n'}\cos D. \tag{5.88}$$

又

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial A_0}{\partial \tilde{\omega}} - \sum A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \tilde{\omega}} \sin D$$

将上式代入(5.69)式得:

$$\frac{de}{dt}=-\frac{1-e^2-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\sum A_1k\sin D$$
$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left(\frac{\partial A_0}{\partial\tilde{\omega}}-\sum A_1\frac{\partial A_1}{\partial\tilde{\omega}}\sin D\right),$$

积分上式得:

$$e=e_0-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial A_0}{\partial\tilde{\omega}}t+\frac{1-e^2-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}$$
$$\times\sum\frac{A_1k}{nk+n'k'}\cos D$$
$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\sum A_1\frac{\partial A_1}{\partial\tilde{\omega}}\cdot\frac{1}{nk+n'k'}\cos D. \qquad (5.89)$$

从(5.88)和(5.89)式我们可以看出 a 只有周期变化，而 e 既有长期变化，也有周期变化，对于其余的四个根数，我们可一一作出类似的讨论，结果表明，除半长径 a 无长期变化以外，其他五个轨道根数都存在长期变化同时也有周期变化，因此一阶摄动解可以形式上表示成:

$$\left.\begin{aligned}
a&=a_0+PT\\
e&=e_0+e_1t+PT\\
i&=i_0+i_1t+PT\\
\Omega&=\Omega_0+\Omega_1t+PT\\
\tilde{\omega}&=\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_1t+PT\\
\varepsilon_0&=\varepsilon_{0_0}+\varepsilon_{0_1}t+PT
\end{aligned}\right\}. \qquad (5.90)$$

上式中 PT 表示周期项，e_1、i_1…… 等表示长期项系数. 从(5.88)和(5.89)式中不难看出周期项的周期为 $\frac{2\pi}{nk+n'k'}$，它们的系数中还含有 $\frac{1}{nk+nk'}$ 的因子，当 $nk+n'k'$ 不很小时，这种周期项称为短周期项，这些项的振幅也不大；当 $nk+n'k'$ 很小时，周期项的周期很长，振幅很大，称为长周期项. 两个行星的平

均运动 n、n' 若接近某一个整数比，$\frac{n}{n'}=-\frac{k'}{k}$，即 $nk+n'k'\approx 0$，这种情况称之为两行星运动接近通约（或共振）。通约时，出现大振幅的长周期变化，产生轨道的不稳定，因此有人用它来解释小行带出现的空隙。

计算二阶摄动，原则上说只要在(5.85)式中右端取前三项即可，但是实际计算时却要比计算一阶摄动麻烦得多。积分拉格朗日行星运动方程时，要将方程右端函数看出轨道根数的函数，作多元函数的台劳展开，精确到摄动因子(行星质量 m_1 或 m_2)的二阶小量。例

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}=2\mu^{-1/2}a^{1/2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \tag{5.91}$$

而
$$a^{1/2}=a_0^{1/2}+\left(\frac{\partial(a^{1/2})}{\partial a}\Delta a+\cdots\cdots\right) \tag{5.92}$$

上式中的 Δa 可将一阶摄动的结果代人，由(5.88)式可知

$$\Delta a=2\mu^{-1/2}a_0^{1/2}\sum\frac{A_1k}{nk+n'k}\cos D \tag{5.93}$$

A_1 中已含有摄动因子 m_2。

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}=&\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}+\frac{\partial^2 R}{\partial a\partial \varepsilon_0}\Delta a+\frac{\partial^2 R}{\partial e\partial \varepsilon_0}\Delta e\\&+\frac{\partial^2 R}{\partial i\partial \varepsilon_0}\Delta i+\cdots\cdots\\&+\frac{\partial^2 R}{\partial a'\partial \varepsilon_0}\Delta a'+\frac{\partial^2 R}{\partial e'\partial \varepsilon_0}\Delta e'+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{5.94}$$

a'、e'…… 等表示摄动行星的轨道根数。将(5.92)和(5.94)式代入(5.91)并积分便可得二阶摄动解，一般说二阶摄动也包含长期项和周期项，并且还会出现长期项与周期项相乘的混合项，称为泊松项。对于半长径 a 来说不仅一阶摄动无长期项，二阶摄动也只有周期项和泊松项。

勒威耶 (Le. verrier)、纽康 (Newcomb) 和罗斯 (Ross) 等人根据大行星运动理论都编写过星历表，然而用分析方法研究大

行星仍存在不少困难，特别对于 i 和 e 较大时和考虑高阶摄动的情况．自 1984 年起，直接采用大行星运动方程的数值积分编制行星的星历表．

作为参考，我们给出纽康采用的内行星平均根数(不考虑周期变化)和勒威耶给出的外行星的平均根数公式

历元 1900 年 1 月 0 日 12^h $TDT = JD2415020.0$

水星

$$\Omega = 47°08'45''.40 + 4266''.75t + 0''.626t^2$$
$$i = 7°00'10''.37 + 6''.999t - 0''.066t^2$$
$$\tilde{\omega} = 75°53'58''.91 + 5599''.76t + 1.066t^2$$
$$e = 0.20561421 + 0.00002046t - 0.000000030t^2$$
$$\lambda = 178°10'44''.68 + 538106654''.8t + 1''.084t^2$$
$$a = 0.3870986$$

金星

$$\Omega = 75°46'46''.73 + 3239''.46t + 1''.476t^2$$
$$i = 3°23'37''.07 + 3''.621t - 0''.0035t^2$$
$$\tilde{\omega} = 130°09'49''.8 + 5068''.93t - 3''.515t^2$$
$$e = 0.00682069 - 0.0004774t + 0.000000091t^2$$
$$\lambda = 342°46'01''.39 + 210669162.88t + 1''.1148t^2$$
$$a = 0.7233316$$

地球

$$\tilde{\omega} = 101°13'15''.0 + 6189''.03t + 1''.63t^2 + 0''.012t^3$$
$$e = 0.01675104 - 0.00004180t - 0.000000126t^2$$
$$\lambda = 99°41'48''.04 + 129602768''.13t + 1''.089t^2$$
$$a = 1.00000030$$

火星

$$\Omega = 48°47'11''.19 + 2775''.57t - 0''.005t^2 - 0''.0192t^3$$
$$i = 1°51'01''.20 - 2''.430t + 0''.0454t^2$$
$$\tilde{\omega} = 334°13'05''.53 + 6626''.73t + 0''.4675t^2 - 0''.0043t^3$$
$$e = 0.09331290 + 0.000092064t - 0.000000077t^2$$

$\lambda = 293°44'51''.46 + 68910117''.33t + 1''.1184t^2$

$a = 1.5236915$

木星

$\Omega = 99°26'36''.19 + 3637''.908t + 1''.2680t^2$

$\quad - 0''.03064t^3$

$i = 1°18'31''.45 - 20''.506t + 0''.014t^2$

$\varpi = 12°43'15''.34 + 5795''.862t + 3''.80258t^2$

$\quad - 0.01236t^3$

$e = 0.04833475 + 0.000164180t - 0.0000004676t^2$

$\quad - 0.0000000017t^3$

$\lambda = 238°02'57''.32 + 10930687''.148t + 1''.20486t^2$

$\quad - 0''.005936t^3$

$a = 5.202561$

土星

$\Omega = 112°47'25''.4 + 3143''.5025t - 0''.54785t^2$

$\quad - 0''.0191t^3$

$i = 2°29'33''.07 - 14''.108t - 0''.05576t^2 + 0.00016t^3$

$\varpi = 91°05'53''.38 + 7050''.297t + 2''.9749 + 0''.0166t^3$

$e = 0.05589232 - 0.00034550t - 0.000000728t^2$

$\quad + 0.00000000074t^3$

$\lambda = 266°33'51''.76 + 4404635''.5810t + 1''.16835t^2$

$\quad - 0''.0021t^3$

$a = 9.554747$

天王星

$\Omega = 73°28'37''.55 + 1795''.204t + 4''.722t^2$

$i = 0°46'20''.87 + 2''.251t + 0.1422t^2$

$\varpi = 171°32'55''.14 + 5343''.958t + 0''.8539t^2$

$\quad - 0''.00218t^3$

$e = 0.0463444 - 0.00002658t + 0.000000077t^2$

$\lambda = 244°11'50''.89 + 1547508''.765t + 1''.13774t^2$

$$-0''.002176t^3$$

$$a = 19.21814$$

海王星

$$\Omega = 130°40'52''.89 + 3956''.166t + 0.89952t^2$$
$$- 0.016984t^3$$

$$i = 1°46'45''27 - 34''.357t - 0''.0328t^2$$

$$\tilde{\omega} = 46°43'38''.37 + 5128''.468t + 1''.40694t^2$$
$$- 0''.002176t^3$$

$$e = 0.00899704 + 0.000006330t - 0.000000002t^2$$

$$\lambda = 84°27'28''.78 + 791589''.291t + 1''.15374t^2$$
$$- 0''.002176t^3$$

$$a = 30.10957$$

时间 t 的单位是儒略世纪，半长径单位是天文单位. λ 是平黄经，即 $\lambda = \tilde{\omega} + M$.

是否可以根据行星运动的理论来判断太阳系的稳定性呢？这个问题目前有待进一步的研究. 从一阶、二阶理论看，各行星的半长径 a 没有长期摄动，似乎太阳系是稳定的. 然而，偏心率 e 有长期变化，这也有可能导致轨道的不稳定. 但是，考虑了高阶摄动后情况又会怎样？我们只能从以往的演化事实和目前的情况说太阳系基本是稳定的.

§7 月球的运动

月球是离我们最近的自然天体，其位置的观测精度最高. 从18世纪以来拉普拉斯、德洛勒 (Delaunay)、汉森 (Hansen)、希耳和布朗 (Brown) 等人对月球的运动作了许多研究工作，编制了月球的运动表. 本节介绍月球运动中的主要问题即月球仅受太阳摄动时的运动问题.

当月球围绕地球运动时，它受到太阳的摄动. 其摄动函数是:

$$R = Gm\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right), \tag{5.95}$$

其中 m 是太阳的质量，$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别是月球和太阳的地心矢。

设 s 为月球与太阳的地心张角，则有

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos s, \tag{5.96}$$

由于 $r \ll r'$，故从(5.96)式可得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r'}\left(1 - \frac{2r}{r'}\cos s + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{r'}\left[1 + \frac{r}{r'}\cos s + \frac{r^2}{r'^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 s\right) + \cdots\cdots\right].\end{aligned} \tag{5.97}$$

利用 (5.97) 式和 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' = rr'\cos s$，在忽略与月球根数无关的 $\frac{1}{r'}$ 以及高次项后，(5.95) 式化为：

$$R = \frac{Gm}{r'^3}r^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 s\right), \tag{5.98}$$

在图 5-4 中，设 E、S 和 L 分别表示地球、太阳和月球，γ 为春

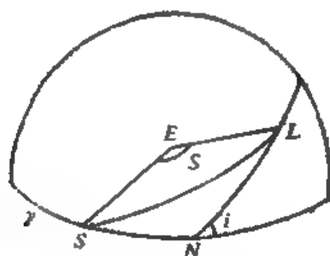


图 5-4

分点，则月球和太阳的经度分别为：

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \widehat{\gamma N} + \widehat{NL} = \Omega + \omega + f\\ \phi' &= \widehat{\gamma S} = \omega' + f'\end{aligned}\right\}, \tag{5.99}$$

其中 f 和 f' 分别是月球和太阳的真近点角.

在球面三角形 SNL 中,采用余弦公式可得:

$$\cos s = \cos(\phi - \Omega)\cos(\Omega - \phi') + \sin(\phi - \Omega)\sin(\Omega - \phi')\cos(\pi - i),$$

或者是

$$\cos s = \cos(\phi - \Omega)\cos(\phi' - \Omega) + \sin(\phi - \Omega)\sin(\phi' - \Omega')\cos i. \tag{5.100}$$

利用 $\cos i = \cos^2\frac{i}{2} - \sin^2\frac{i}{2}$ 和 $1 = \cos^2\frac{i}{2} + \sin^2\frac{i}{2}$,

(5.100) 式又可化为

$$\cos s = \cos^2\frac{i}{2}\cos(\phi - \phi') + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\phi + \phi' - 2\Omega). \tag{5.101}$$

将(5.101)式代入(5.98)式后,可得摄动函数:

$$R = \frac{Gm}{r'^3} r^2\Big[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^4\frac{i}{2}\cos^2(\phi - \phi') + 3\cos^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i}{2}\cos(\phi - \phi')\cos(\phi + \phi' - 2\Omega) + \frac{3}{2}\sin^4\frac{i}{2}\cos^2(\phi + \phi' - 2\Omega)\Big]. \tag{5.102}$$

由于 $Gm = n'^2 a'^3$, $\phi - \phi' = \Omega + \omega + f - \omega' - f'$ 和 $\phi + \phi' - 2\Omega = \omega + f + \omega' + f' - \Omega$, (5.102) 式又可化为:

$$\begin{aligned} R = n'^2 a^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\Big\{&-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos^4\frac{i}{2} \\ &+ \frac{3}{4}\cos^4\frac{i}{2}\cos 2(\omega + f - \omega' - f' + \Omega) \\ &+ \frac{3}{8}\sin^2 i\,[\cos 2(\omega + f) + \cos 2(\omega' + f' - \Omega)] \\ &+ \frac{3}{4}\sin^4\frac{i}{2} + \frac{3}{4}\sin^4\frac{i}{2}\cos 2(\omega + f + \omega' + f' - \Omega)\Big\}. \end{aligned} \tag{5.103}$$

为了讨论方便起见，我们可以作下列合理的简化：

① 由于月球轨道倾角 i 是小量 ($i=5°8'$)，因此在 R 中能够忽略 i^4 及其以上项。这时 $\cos^4\frac{i}{2}\approx 1-\frac{i^2}{2}$，$\sin^2 i\approx i^2$ 和 $\sin^4\frac{i}{2}\approx 0$。

② 忽略地球轨道的偏心率 e'($e'=0.056$)。这时 $r'\approx a'$ 和 $f'\approx M'$。

③ 由于月球轨道偏心率 e 也是小量 ($e=0.054$)，因此在 R 中能够忽略高于 e^2 项。

利用简化条件 (1) 和 (2)，(5.103) 式可以化为

$$
\begin{aligned}
R = n'^2 a^2\left(\frac{r}{a}\right)^2 \Big\{ & \frac{1}{4}-\frac{3}{8}i^2 \\
& + \frac{3}{4}\left(1-\frac{i^2}{2}\right)\cos 2(\omega+f-\omega'-M'+\Omega) \\
& + \frac{3}{8}i^2[\cos 2(\omega+f)+\cos 2(\omega'+M'-\Omega)]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{5.104}
$$

从 (5.104) 式可以看出 R 由二部分组成，一部分是仅与月球轨道根数有关的常数项 R_c，另一部分是通过月球的平近点角 M 和太阳的平近点角 M' 显含时间 t 的周期项 R_t，即有

$$R = R_c + R_t, \tag{5.105}$$

利用简化条件(3)和

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \mathrm{d}M \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-e\cos E)^3\,\mathrm{d}E \\
&= 1+\frac{3}{2}e^2
\end{aligned}
$$

可得(5.105)中的

$$R_c = n'^2 a^2\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{8}i^2\right). \tag{5.106}$$

由(5.106)式有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R_s}{\partial a}&=n'^2a\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}i^2\right)\\ \frac{\partial R_s}{\partial e}&=\frac{3}{4}n'^2a^2e\\ \frac{\partial R_s}{\partial i}&=-\frac{3}{4}n'^2a^2i\end{aligned}\right\}。\tag{5.107}$$

将(5.107)代入摄动运动方程后，可得月球轨道根数长期项的系数是：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{da}{dt}=\frac{de}{dt}=\frac{di}{dt}=0\\ &\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\\ &\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\\ &\frac{d\lambda}{dt}=n-\frac{n'^2}{n}\left(1+\frac{9}{8}e^2-\frac{3}{2}i^2\right)\end{aligned}\right\}。\tag{5.108}$$

其中 $\tilde{\omega}=\Omega+\omega$，是月球近地点黄径。$\lambda=\int n dt+M_0+\tilde{\omega}$，是月球的平黄径。

(5.108)式积分后可得：

$$\left.\begin{aligned}&a=a_0,\quad e=e_0,\quad i=i_0\\ &\Omega=\Omega_0+\frac{d\Omega}{dt}(t-t_0)\\ &\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0+\frac{d\tilde{\omega}}{dt}(t-t_0)\\ &\lambda=\lambda_0+\frac{d\lambda}{dt}(t-t_0)\end{aligned}\right\}。\tag{5.109}$$

其中 a_0、e_0、……λ_0 是月球轨道根数在某历元时刻 t_0 时的值，$\frac{d\Omega}{dt}$、$\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ 和 $\frac{d\lambda}{dt}$ 的表示式为(5.108)式，它们可以根据观测月球的位置来确定。利用更精确的月球运动理论还可以得到更加精确

的结果．布朗在编制月离表时，给出月球轨道的平均根数(消去周期项后的根数)是：

历元　$1900^{Y}1^{M}0^{d}12^{h}$　(E. T)

$$\left.\begin{aligned}
a &= 384402\text{km} \pm 2\text{km}\\
e &= 0.054900489\\
i &= 5°08'43''.427\\
\Omega &= 259°.183275 - 0°.0529532222d + 0°.002078t^2\\
&\quad + 0°.000002t^3\\
\tilde{\omega} &= 334°.329556 + 0°.1114040803d - 0°.010325t^2\\
&\quad - 0°.000012t^3\\
\lambda &= 270°.434164 + 13°.1763965269d - 0°.001133t^2\\
&\quad + 0°.0000019t^3
\end{aligned}\right\} \quad (5.110)$$

其中时间单位 d 是平太阳日，t 是儒略世纪．

$\frac{d\Omega}{dt} < 0$，说明在太阳引力作用下月球升交点在西退．西退的周期是 $\frac{360}{0.05295322 \times 365.2422}$ 年或者是 18.6135 年，即每 18.6135 年转一圈．月球轨道升交点移动直接影响着交食规律，因此它在研究日、月食时相当重要．在我国古代早就发现了这个周期，称它为"一章"．$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} > 0$ 说明在太阳引力作用下月球近地点在东进．东进的周期是 $\frac{360}{0.1114041 \times 365.2422}$ 年或者 8.8475 年，即每 8.8475 年转一圈．月球轨道近地点的移动造成月地距离的变化，这会引起潮汐中的"视角差"，因此它在研究潮汐时有一定意义．

将 (5.105) 式中的周期项 R_i 代入摄动运动方程后，可得月球轨道根数的周期项．由于月球轨道根数存在着周期变化，因此它的经度 ψ 和纬度 φ 也存在着周期变化．月球的真经度和纬度分别是

$$\psi = \Omega + \omega + f \quad (5.111)$$

和

$$\varphi = \sin^{-1}[\sin i \sin(\omega + f)] \tag{5.112}$$

利用(5.111) 和 (5.112)式可以得到月球的经度和纬度的周期项，月球轨道的周期项称为月行差．由于月球距离我们最近，它的位置比其它天体更容易定准，因此许多差数早就发现了．下面列出几种主要的月行差．

(1) 纬度差．

在 R_s 中有一项 $\frac{3}{8}n'^2a^2i^2\cos(2M'+2\omega'-2\Omega)$ 使月球的黄纬产生以 $(M+\omega+2\Omega-2M'-2\omega')$ 为引数的周期变化．它的变化周期是 32^d.279915，振幅是 10′23″.7．这是月球黄纬中最大的振动项．

(2) 出差．

在 R_s 中有一项使月球的黄经产生以 $[M+2(\Omega+\omega)-2(M'+\omega')]$ 为引数的周期变化．它的变化周期是 31^d.80747，振幅是 1°16′26″.4．这是月球黄经中最大的振动项，早在依巴谷(Hipparchus) 时代就从观测上发现了．

(3) 二均差．

在 R_s 中有一项使月球的黄经产生以 $2(M+\omega+\Omega-M'-\omega')$ 为引数的周期变化．它的变化周期是半个朔望月，振幅是 39′29″.9．这也是月球黄经中有较大的振动项，早在托勒玫(Ptolemy) 时代也从观测上发现了．

(4) 周年差．

在 R_s 中还有一项使月球的黄经产生以一个近点年为变化周期，振幅是 11′08″.9 的周期变化．

(5) 月角差．

在 R_s 中，另外一项使月球的黄经产生以 $(M+\omega+\Omega-M'-\omega')$ 为引数的周期变化．它的变化周期正好是二均差周期的二倍即一个朔望月，振幅是 2′04″.8．

除此之外还有许多没有命名的其它月行差．布朗在编制月离表时就有 310 余种不同周期的月行差．其中经度月行差中，振幅

超过 100″ 的有 13 种，振幅在 1″ 到 100″ 之间的就有 46 种之多. 目前天文年历中所用的月亮表是根据布朗的"Tables of the Motion of the Moon"(New Haven, Yale University press, 1919) 中公式计算的. 他除了考虑太阳的摄动外(称为太阳项,这是主要的)还有水星、金星、火星、木星和土星的直接摄动和间接摄动（通过对地球运动的摄动来影响月亮运动）以及地球和月球形状引起的摄动.

§8 海王星的发现和水星近日点的进动

1781 年 3 月 31 日赫歇耳（Herschel）首先用他自己磨制的望远镜发现了天王星. 在这前后，人们对天王星就进行了多次观测. 1821 年法国天文学家布瓦尔德（Bouvard）受法国经度局委托计算了土星、木星和天王星的星历表. 对于土星和木星观测到的位置与用这个星历表算得的位置差 $O-C$ 值完全相符合. 但是对于天王星,发现它的 $O-C$ 值相差很大,而且以后的偏离越来越大. 到了 1846 年,经度上的 $O-C$ 值已偏离达到 2′. 这是无法用观测误差来解释的. 究竟是作为天体力学的基础——万有引力理论不可靠还是在天王星的轨道外还存在有一颗未知的行星在影响着它的运动,人们努力在寻找原因.

1841年 7 月 3 日当时还在英国剑桥大学学习的年轻学生亚当斯 (Admas) 完成了一篇文章,在这篇文章中他认为存在有一颗未知行星在影响着天王星的运动. 后来他利用天王星的 $O-C$ 值计算了这颗行星的质量和轨道根数，并将结果交给了皇家天文学家艾里（Airy)，但是没有引起足够的重视.

与此同时法国天文学家勒威耶也在进行这项研究工作，1845 年他完成了有关这颗新行星的第一篇论文，后来他又将一系列的结果呈报给法国科学院. 1846 年 8 月 31 日他在"论使天王星运行失常的行星，它的质量，轨道和现在的位置"一文中具体算出了这颗行星的轨道根数和预言了它的位置. 三个星期后，1846 年 9

月23日，柏林天文台的加勒(Galle)终于在宝瓶座内与勒威耶预言的位置相差不到1°处发现了海王星。

下面介绍他们推算的基本原理。

由于当时所知道的行星轨道倾角都比较小，例如天王星大约是0°.77，因此他们假定这颗未知行星的轨道倾角也很小，这样可以近似地当作为平面问题。

他们认为造成天王星位置偏差 $O-C$ 的原因是来自二个方面。一个方面是由于布瓦尔德所给出的天王星轨道根数本身有误差，可以记为 U。它包含有 Δa、Δe、$\Delta\tilde{\omega}$ 和 $\Delta\varepsilon$。另一方面是由于这颗未知行星对它的摄动，可以记为 N。它应当包含这颗未知行星的各种数据：m'、a'、e'、$\tilde{\omega}'$ 和 ε'。在天王星位置偏差中扣除了木星和土星的摄动后有：

$$U+N=O-C。\tag{5.113}$$

在(5.113)式中，有9个未知量，利用9次以上观测资料就可以建立9个条件方程，用最小二乘法解出。

天王星位置的偏差可以分解在径向和横向上。前者是无法观测(采用光学方法)到的，后者对于平面问题实际上表现为经度偏差。勒威耶尔根据天王星的真经度 $\lambda=\tilde{\omega}+f$ 的偏差来建立和求解(5.113)式的。由于(5.113)式中 N 所包含的 a' 的函数形式相当复杂，于是他根据当时已经知道的提丢斯-波德定则，令 $a'=2a$。另外他还忽略了 e' 的二次及其以上项，于是(5.113)式可以写为

$$\begin{aligned}\alpha_1\Delta n+\alpha_2\Delta\varepsilon+\alpha_3\Delta e+\alpha_4\Delta\tilde{\omega}+m'hH+m'kK+m'L\\=\lambda_0-\lambda_c\end{aligned}\tag{5.114}$$

式中 $h=e'\sin\tilde{\omega}'$，$k=e'\cos\tilde{\omega}$；H、K 和 L 是 ε' 的三角级数；α_1、α_2……是已知的系数。

勒威耶利用了18次观测资料，由(5.114)式计算了这颗未知行星的轨道根数 e'、$\tilde{\omega}'$、ε' 和它的质量 m'。

亚当斯是根据天王星的平经度 $l=\tilde{\omega}+M$ 的偏差 l_0-l_c 得到了类似于(5.114)式的条件方程，然后他利用了30次观测资料

来推算出这颗未知行星的轨道根数和质量。

在海王星发现后不久，1846年10月10日，拉塞耳发现了它的第一颗卫星——海卫一。后来威耳克利用海卫一测定了海王星的质量，并且根据对海王星的观测推算了它的轨道根数，这些数据与现在所得到的值比较接近。表5-1列出了当时亚当斯和勒威耶推算的海王星的质量和轨道根数以及威耳克所计算的相应的值。

表5-1 推算的海王星的质量和轨道根数

	亚当斯	勒威耶	威耳克
质量(以太阳质量为单位)	$\frac{1}{6666}$	$\frac{1}{9300}$	$\frac{1}{15000}$
轨道半长径(天文单位)	37.25	36.15	30.04
轨道周期(年)	227.3	217.4	164.6
轨道偏心率	0.1206	0.1076	0.0086
近日点经度	299°11′	284°45′	48°21′
真经度(1847年1月1日)	329°57′	326°32′	327°34′

由表5-1可以看出，亚当斯和勒威耶所推算出的海王星轨道彼此十分相近，但与海王星的真实轨道相差很大。他们得到的轨道半长径太大，由此推算出海王星的质量也太大，这样才能使得摄动影响大致一样。另外，近日点的经度相差很远。但是，由于海王星的轨道接近于圆轨道，这个影响也就不太大，所推算的位置与真实位置比较相符，因此能在与预言的位置偏离不远的地方终于发现了海王星。

在扣除海王星的摄动以后，观测到天王星的位置与计算的位置仍有些偏差。另外后来观测到的海王星的位置与计算的位置有些类似的偏差。于是人们又设想可能在海王星的轨道之外还存在有另一颗未知行星。当时人们采用类似的方法也预言这颗未知行星的位置。最后在1930年3月13日发现了冥王星。

在发现海王星以后，勒威耶考虑了海王星的摄动又重新修订了行星运动理论，编制了新的行星星历表，一直沿用到19世纪末期。

1859年，当他在编制行星星历表时，发现观测到的水星位置

与计算的位置也存在着偏差．在扣除了行星对水星的全部摄动和其它因素之后，水星的近日点还有每百年进动 40″ 多一些无法得到解释．由于水星离开太阳太近，直接观测比较困难，通常是通过水星凌日来观测它的． 1882 年纽康利用 1677 到 1881 年水星凌日的观测资料测得水星近日点的总进动是每百年 5600″.0，其中岁差影响是 5025″.6，金星的摄动是 277″.9，地球的摄动是 90″.0，火星的摄动是 2″.5，木星的摄动是 153″.6，土星的摄动是 7″.3，天王星的摄动是 0″.1，海王星的摄动很小．这样扣除了这些因素之后，准确地测定出水星近日点有每百年 43.0″ 的进动偏差．在海王星发现的鼓舞下，勒威耶又设想在水星轨道内也存在着一个未知行星．他还具体计算了这颗“水内行星”的轨道数据，预推它凌日（由于它离开太阳更近自然只能通过凌日才能来观测）的日期．大家还给这颗水内行星定名为“祝融星”（Vulcan），并努力地观测，结果始终没有发现它．后来潘加来等认为可能是由于太阳周围存在着一圈尘埃在影响着水星的运动．但是这些尘埃也一直没有被观测到．

1915 年爱因斯坦（Einstein）用黎曼几何作为主要数学工具修正了作为天体力学的基础——牛顿引力理论，建立了广义相对论．同时史瓦茨西德（Schwarzschild）解出了球对称的场方程，从而可以计算出行星近日点的进动，这样才比较圆满地解释了水星近日点进动的偏差问题． 下节将讨论天体运动中的相对论效应，利用广义相对论具体推算水星近日点的进动．

§9 天体运动中的相对论效应

按照广义相对论，空间和时间是相互关联的．因此天体应当在由三维空间坐标和一维时间坐标所构成的四维超曲面上运动．类似(1.9)式在这个四维超曲面上，线元ds 有

$$ds^2 = \sum_{\rho,\sigma=1}^{4} g_{\rho\sigma} d\xi^{\rho} d\xi^{\sigma} \tag{5.115}$$

其中 $d\xi^{\rho}$ 是线元在曲线坐标系中第 ξ 个分量；如果采用球坐标，则 $\xi^1=r$，$\xi^2=\varphi$，$\xi^3=\lambda$ 是空间坐标，$\xi^4=t$ 是时间坐标．$g_{\rho\sigma}$ 是反映这个空间特征的度规张量．

1915 年，史瓦茨西德解出了位于在原点，物质分布呈球对称而四周是真空的静止天体的引力场方程．得到这空间的度规张量是：

$$g_{\rho\sigma}=\begin{pmatrix}-e^{-\alpha}, & 0, & 0, & 0\\ 0, & -r^2, & 0, & 0\\ 0, & 0, & -r^2\cos^2\varphi, & 0\\ 0, & 0, & 0, & c^2e^{\alpha}\end{pmatrix}. \quad (5.116)$$

其中 $e^{\alpha}=1-\dfrac{2GM}{c^2r}$；$c$ 是光速，M 是主星体的质量．在这样空间中，如果没有其它外力，天体应当沿着短程线运动．利用变分法可得这时天体运动应当满足下列方程

$$\frac{d^2\xi^{\mu}}{ds^2}+\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}\begin{Bmatrix}\mu\\ \rho\sigma\end{Bmatrix}\frac{d\xi^{\rho}}{ds}\frac{d\xi^{\sigma}}{ds}=0,$$

$$(\mu=1,2,3,4) \quad (5.117)$$

式中 $\begin{Bmatrix}\mu\\ \rho\sigma\end{Bmatrix}$ 是克里斯托菲（Christoffel）符号，它有

$$\begin{Bmatrix}\mu\\ \rho\sigma\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{4}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial\xi^{\sigma}}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial\xi^{\rho}}-\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial\xi^{\nu}}\right), \quad (5.118)$$

其中 $g^{\mu\nu}$ 满足 $g_{\rho\mu}g^{\mu\nu}=\delta^{\nu}_{\rho}$．利用 (5.116) 式不难得到：

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-e^{\alpha}, & 0, & 0, & 0\\ 0, & -\dfrac{1}{r^2}, & 0, & 0\\ 0, & 0, & -\dfrac{1}{r^2\cos^2\phi}, & 0\\ 0, & 0, & 0, & \dfrac{1}{c^2}e^{-\alpha}\end{pmatrix}. \quad (5.119)$$

$g_{\rho\sigma}$ 是一个对称张量即 $g_{\rho\sigma}=g_{\sigma\rho}$，故由(5.118)式可得：

$$\left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\} = \left\{ {\mu \atop \sigma\rho} \right\}. \tag{5.120}$$

将(5.116)和(5.119)式代入(5.118)式并利用(5.120)式可以算出:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{ {1 \atop 11} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}, \quad \left\{ {1 \atop 22} \right\} = -re^{x}, \\
&\left\{ {1 \atop 33} \right\} = -re^{x}\cos^2\varphi, \quad \left\{ {1 \atop 44} \right\} = \frac{c^2}{2}e^{2x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}, \\
&\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = \cos\varphi\sin\varphi, \\
&\left\{ {3 \atop 13} \right\} = \left\{ {3 \atop 31} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {3 \atop 23} \right\} = \left\{ {3 \atop 32} \right\} = -\mathrm{tg}\,\varphi, \\
&\left\{ {4 \atop 14} \right\} = \left\{ {4 \atop 41} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}, \text{其余的} \left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\} = 0
\end{aligned}\right\}, \tag{5.121}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = \frac{2GM}{c^2r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}$ 将(5.121)式代入(5.117)式,并作自变量变换 $\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau$ ($\mathrm{d}\tau$ 与 $\mathrm{d}s$ 一样,在四维超曲面上也是一个不变量),可得这时的短程线方程是:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{r} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\dot{r}^2 - re^{x}\dot{\varphi}^2 - re^{x}\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2 \\
&\qquad + \frac{c^2}{2}e^{2x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\dot{t}^2 = 0 \\
&\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + \cos\varphi\sin\varphi\dot{\lambda}^2 = 0 \\
&\ddot{\lambda} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\lambda} - 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\dot{\varphi}\dot{\lambda} = 0 \\
&\ddot{t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\dot{r}\dot{t} = 0
\end{aligned}\right\}, \tag{5.122}$$

式中微商是对原时 τ 进行的。

在球坐标系中,r 对 τ 的二次微商是:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2}=\begin{pmatrix}a_r\\a_\varphi\\a_\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ddot r-r\dot\varphi^2-r\cos^2\varphi\dot\lambda^2\\ r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi+r\sin\varphi\cos\varphi\dot\lambda^2\\ r\cos\varphi\ddot\lambda+2\cos\varphi\dot r\dot\lambda-2r\sin\varphi\dot\varphi\dot\lambda\end{pmatrix}.\qquad(5.123)$$

利用(5.122)式中的第二式和第三式可得：

$$a_\varphi=a_\lambda=0。\qquad(5.124)$$

由(5.115)和(5.116)式有：

$$ds^2=-e^{-\nu}dr^2-r^2(d\varphi^2+\cos^2\varphi d\lambda^2)+c^2e^\nu dt^2,\qquad(5.125)$$

利用 $ds^2=c^2d\tau^2$，则(5.125)式可以化为

$$c^2e^\nu\dot t^2-e^{-\nu}\dot r^2-r^2(\dot\varphi^2+\cos^2\varphi\dot\lambda^2)=c^2,\qquad(5.126)$$

利用(5.122)式中的第一式和(5.126)式可得：

$$\ddot r=\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}(\dot r^2-c^2e^{2\nu}\dot t^2)+re^\nu(\dot\varphi^2+\cos^2\varphi\dot\lambda^2)$$

$$=-\frac{c^2}{2}e^\nu\frac{d\nu}{dr}+e^\nu\left(r-\frac{r^2}{2}\frac{d\nu}{dr}\right)(\dot\varphi^2+\cos^2\varphi\dot\lambda^2)。\qquad(5.127)$$

将(5.127)式代入(5.123)式后有：

$$a_r=-\frac{c^2}{2}e^\nu\frac{d\nu}{dr}+re^\nu\left(1-\frac{r}{2}\frac{d\nu}{dr}-e^{-\nu}\right)(\dot\varphi^2+\cos^2\varphi\dot\lambda^2),\qquad(5.128)$$

令 $y=\dot\varphi^2+\cos^2\varphi\dot\lambda^2$，由 (5.122) 式中的第二式和第三式可得：

$$\frac{dy}{d\tau}=-2\dot\varphi\left(\frac{2}{r}\dot r\dot\varphi+\sin\varphi\cos\varphi\dot\lambda^2\right)$$

$$+2\cos^2\varphi\dot\lambda\left(2\operatorname{tg}\varphi\dot\varphi\dot\lambda-\frac{2}{r}\dot r\dot\lambda\right)$$

$$-2\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi\dot\lambda^2=-\frac{4y}{r}\frac{dr}{d\tau}。\qquad(5.129)$$

对(5.129)式积分结果为

$$y=\dot\varphi^2+\cos^2\varphi\dot\lambda^2=\frac{h^2}{r^4},\qquad(5.130)$$

式中 h 为积分常数。

由于

$$\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}\right)\cdot\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}\right)=(0,\ r^2\cos\varphi\dot{\lambda},\ r^2\dot{\varphi})\begin{pmatrix}0\\ r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}\\ r^2\dot{\varphi}\end{pmatrix}$$

$$=r^4(\dot{\varphi}^2+\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2)=h^2。$$

故有

$$\left|\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}\right|=h。$$

因此(5.130)式是运动方程(5.122)式的动量矩积分.

利用(5.122)式中的第四式可得运动方程的另一个积分

$$e^{\nu}\dot{t}=k, \tag{5.131}$$

(5.131)式就是能量积分.

利用(5.130)式以及 $e^{\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r}=\frac{2GM}{c^2r^2}$，可将(5.128)式化为

$$a_r=-\frac{GM}{r^2}-\frac{3GMh^2}{c^2r^4}. \tag{5.132}$$

将(5.124)和(5.132)式一起代入(5.123)式后，可得在史瓦茨西德度规中,天体的运动方程应当是

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}=-\frac{3GMh^2}{c^2r^5}\boldsymbol{r}. \tag{5.133}$$

方程(5.133)式的右端是小量，可以把它看作为摄动力,这样(5.133)式就变成为以原时 τ 为自变量的摄动运动方程,采用常数变异法来求解.

对于无摄运动方程的解仍可以写为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}=r\cos f\boldsymbol{P}+r\sin f\boldsymbol{Q}\\&r=\frac{p}{1+e\cos f},\quad \mathrm{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\mathrm{tg}\frac{E}{2}\\&E-e\sin E=n(\tau-\tau_0)\end{aligned}\right\}. \tag{5.134}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别是 $f=0$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 处的单位矢；$p=a(1-e^2)=\frac{h^2}{GM}$，$n^2a^3=GM$.

这时天体的轨道根数所满足的摄动运动方程从形式上来说与(5.1)式相类似，只是自变量改为原时 τ。

由(5.133)式可得其中的

$$S = -\frac{3GMh^2}{c^2 r^4}, \qquad T = W = 0. \tag{5.135}$$

将(5.135)式代入摄动运动方程(5.43)式，并利用 $d\tau = \frac{r^2}{h}df$ 作自变量变换，然后对新的自变量 f 积分结果可得：

$$\left.\begin{aligned}
& i = i_0, \quad \Omega = \Omega_0 \\
& a = a_0 + \frac{6GMe}{c^2(1-e^2)^2}\Big[\left(1+\frac{e^2}{4}\right)(\cos f - \cos f_0) \\
& \qquad + \frac{e}{2}(\cos 2f - \cos 2f_0) + \frac{e^2}{12}(\cos 3f - \cos 3f_0)\Big] \\
& e = e_0 + \frac{3GM}{c^2 p}\Big[\left(1+\frac{e^2}{4}\right)(\cos f - \cos f_0) \\
& \qquad + \frac{e}{2}(\cos 2f - \cos 2f_0) + \frac{e^2}{12}(\cos 3f - \cos 3f_0)\Big] \\
& \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \frac{3GM}{c^2 pe}\Big[e(f - f_0) \\
& \qquad + \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\sin f - \sin f_0) \\
& \qquad + \frac{e}{2}(\sin 2f - \sin 2f_0) + \frac{e^2}{12}(\sin 3f - \sin 3f_0)\Big]
\end{aligned}\right\}. \tag{5.136}$$

由(5.136)式可以看到：在天体运动中，相对论效应使它的轨道平面在空间中的位置保持不变，而轨道的大小和形状作周期变化，轨道近点经度不但有周期变化，而且还有长期变化，这就是近点进动．变化周期相当于天体绕主星体运动的近点周期，变化振幅约为

$$\Delta a_s \approx \frac{6GMe}{c^2(1-e^2)^2}, \quad \Delta e_s \approx \frac{3GM}{c^2 p}, \quad \Delta\tilde{\omega}_s \approx \frac{3GM}{c^2 pe}. \tag{5.137}$$

近点经度的进动速度为

$$\frac{d\tilde{\omega}_1}{dt}=\frac{3GMn}{c^2p} \tag{5.138}$$

利用(5.137)和(5.138)式,不难算出在类地行星运动中的相对论效应,结果如表 5-2。

表 5-2　类地行星运动中的相对论效应

行　星	Δa_r(公里)	$\Delta e_r(10^{-8})$	$\Delta\tilde{\omega}_r$(角秒)	$\frac{d\tilde{\omega}_1}{dt}$(角秒/百年)
水　星	1.99	7.99	0.08	42.98
金　星	0.06	4.09	1.24	8.63
地　球	0.15	2.96	0.37	3.84
火　星	0.84	1.96	0.04	1.35

对于类木行星,相对论效应的数值更小。因此,在类地行星星历表计算中往往需要考虑相对论效应。而在类木行星星历表计算中一般可以忽略相对论效应。

在月球运动中,相应的 $\Delta a_r = 10^{-6}$ 公里,$\Delta e_r = 4\times10^{-11}$,$\Delta\tilde{\omega}_r = 2''\times10^{-7}$, $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=0''.06$/百年。因此,在通常情况下可以不考虑相对论效应。

在人造卫星运动中,由于绝大部分卫星的轨道半长径比月地距离小得多,因此相对论效应比较显著。例如我国第一颗卫星,$\Delta a_r = 0.3433$ 厘米, $\Delta e_r = 0.1737\times10^{-8}$, $\Delta\tilde{\omega}_r = 0''.002866$, $\frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} = 7^\circ.906\times10^{-6}$/天。它们相当于三阶短周期变化和长期变化。因此在人造卫星精密星历表计算的二阶理论和三阶理论中应当考虑相对论效应。

§10　太阳扁率的估计和它对行星运动的影响

太阳是一个炽热的气体球。它和地球大气类似,没有明显的边

界、形状．离开太阳中心不同距离处，密度和自转角速度等都不一样．距离越小密度越大，自转角速度越快．

我们定义太阳的(视)扁率为 $\alpha=\frac{R_{\odot}-R'_{\odot}}{R_{\odot}}$，其中 $R_{\odot}$、$R'_{\odot}$ 分别表示太阳的赤道和二级半径．由于太阳扁率很小，而且又无确定形状，故 α 很难定准，各人所测得的数值差异也很大． 例如，1967 年迪克 (Dicke) 和戈登贝格 (Goldenberg) 测得的 α 约为 $5.0\pm0.7\times10^{-5}$，1970 年迪克又测得 α 约为 5.2×10^{-5}，1974年赫耳 (Hill) 测得 α 约为 10^{-5}，有的更小些． 另外迪克还发现 α 有波动现象，下面我们利用太阳处于自转平衡状态时从力学角度来估计一下它的扁率．

假定太阳是一个密度均匀的理想流体．如果它处于自转平衡时的表面(也就是水准面)形状是一个旋转椭球面，根据马克洛林 (Maclaurin) 理论，这时太阳表面的扁率 α 近似为

$$\alpha=\frac{5\omega^2R_{\odot}^3}{4GM_{\odot}},\tag{5.139}$$

式中 $M_{\odot}$、$R_{\odot}$ 和 ω 分别是太阳的质量、视半径和自转角速度．

假定太阳是一个密度不均匀的理想流体，如果它处于自转平衡时的表面仍是旋转椭球面，而且等密度面也是旋转椭球面，根据克雷诺 (Clairaut) 理论，这时太阳表面的扁率 α 近似满足下面不等式

$$\frac{\omega^2R_{\odot}^3}{2GM_{\odot}}<\alpha<\frac{5\omega^2R_{\odot}^3}{4GM_{\odot}},\tag{5.140}$$

若取太阳表面赤道区域的自转周期是 25.4 天，这时的 $\omega=14^{\circ}\!.17$/天．根据太阳的质量和视半径，利用(5.140)式不难算出太阳的扁率 α 应当限制在下面不等式：

$$1.04\times10^{-5}<\alpha<2.60\times10^{-5},\tag{5.141}$$

众所周知，太阳并不是一个理想流体，它的自转角速度 ω 也不是一个常数． 太阳表面角速度约 $14^{\circ}\!.17$/天，到内部时可高达 $338^{\circ}\!.81$/天．同时在不同纬度处自转角速度也不一样，纬度越高角

速度越小。另外太阳内部还有许多非引力作用如气体压力，光压力、电磁作用和热核反应等，这些都可能改变太阳的形状和密度分布。因此(5.141)式仅仅是一种近似估计式，太阳扁率 α 有可能达到 5×10^{-5} 数量级，甚至于更大些。但是，从上面估计太阳扁率 α 绝不会小到过去人们所认为的可以完全忽略的程度，它至少应当在 10^{-5} 数量级上。

由于太阳存在着扁率 α，要计算它对行星运动的影响，我们应该首先推算太阳扁率 α 和它的四极矩 J_2 的关系。

与第一章中(1.51)式相类似可以推算出太阳对其表面任何一点的引力势近似为

$$V=\frac{GM_\odot}{r}\left[1-J_2\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)\right], \tag{5.142}$$

式中 r 和 φ 是该点的日心距离和纬度，J_2 是太阳的四极矩。

如果认为太阳是一个旋转椭球面，则利用第一章中(1.62)式的第一式可得太阳扁率 α 及其四极矩 J_2 之间的关系近似是：

$$J_2=\frac{2}{3}\alpha-\frac{\omega^2R_\odot^3}{3GM_\odot}. \tag{5.143}$$

将(5.139)式代入(5.143)式后，有

$$J_2=\frac{2}{5}\alpha. \tag{5.144}$$

如果仅考虑太阳四极矩的影响，利用第一章中(1.51)式可得太阳对其外一点的引力势是：

$$V=\frac{GM_\odot}{r}\left[1-J_2\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{5.145}$$

由(5.145)式可得太阳四极矩对行星运动产生摄动的摄动函数是：

$$R=-\frac{GM_\odot R_\odot^2J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\right). \tag{5.146}$$

为了方便起见，我们可以采用理论单位制即以太阳的质量和半径为质量和距离单位，选取适当的时间单位使得 $G=1$，这时

(5.146)式化为

$$R = -\frac{J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right), \tag{5.147}$$

由于 $\sin\varphi = \sin i \sin(\omega + f)$，(5.147)式又可以化为

$$R = \frac{J_2}{r^3}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right) + \frac{3}{4}\sin^2 i \cos 2(\omega + f)\right]. \tag{5.148}$$

由于 r 和 f 是行星轨道根数 a、e 和 M 的函数，故形式为(5.148)式的摄动函数 R 可以分为二部分：一部分是仅含轨道根数 a、e 和 i 的常数项；另一部分是含有轨道根数M的周期项．这二部分将会使行星的轨道根数产生长期变化和周期变化．由于太阳的扁率比较小，它对行星运动的影响也很小，因此可以暂且忽略 R 中的周期项而仅考虑其常数项，由此讨论太阳扁率对行星运动的长期影响．

利用二体问题公式：

$$\mathrm{d}M = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \mathrm{d}f, \quad \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos f}{a(1-e^2)}.$$

有

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)\mathrm{d}f \\ &= (1-e^2)^{-3/2}.\end{aligned} \tag{5.149}$$

和

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(\omega + f)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(\omega+f)\mathrm{d}M \\ &= \frac{(1-e^2)^{-3/2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 + e\cos f)\cos 2(\omega + f)\mathrm{d}f \\ &= 0.\end{aligned} \tag{5.150}$$

将(5.148)式对平近点角 M 求平均值，并利用(5.149)和(5.150)式可得 R 中的常数项是：

$$\bar{R} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\mathrm{d}M = \frac{J_2}{2a^3}(1-e^2)^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right). \tag{5.151}$$

由(5.151)式可以看出 $\bar{R}$ 仅是轨道根数 a、e 和 i 的函数，故有：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial M}=0\\
&\frac{\partial \bar{R}}{\partial e}=\frac{3J_2 e}{2a^3}(1-e^2)^{-5/2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\\
&\frac{\partial \bar{R}}{\partial i}=-\frac{3J_2}{2a^3}(1-e^2)^{-3/2}\sin i\cos i
\end{aligned}\right\}. \qquad (5.152)
$$

将(5.152)式代入摄动运动方程(5.67)式后，可得太阳四极矩对行星运动产生的长期项系数是：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0\\
&\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{3J_2 n}{2p^2}\cos i\\
&\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{3J_2 n}{4p^2}(4-5\sin^2 i)
\end{aligned}\right\}. \qquad (5.153)
$$

由(5.153)式很容易看出太阳四极矩对行星轨道根数 a、e 和 i 没有长期影响，但对行星近日点经度会产生进动，它的进动速度是：

$$
\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_2}{\mathrm{d}t}=\frac{3J_2 n}{2p^2}\left(2-\cos i-\frac{5}{2}\sin^2 i\right). \qquad (5.154)
$$

利用(5.144)和(5.154)式，可以算出太阳扁率对行星近日点经度所产生的进动 $\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_2}{\mathrm{d}t}$ 的值。表 5-3 列出了太阳扁率对类地行星的近日点经度所产生进动的值。

表 5-3　太阳扁率对类地行星近日点经度产生进动的值

α	水星	金星	地球	火星
10^{-5}	0.49	0.052	0.017	0.004
5.2×10^{-5}	2.57	0.27	0.08	0.02
迪克的结果	4.05	0.45	0.14	—
克勒门斯的结果	0.01	--	0.00	—

注：表中单位是每百年的角秒数。

在表 5-3 中第一和第二行是取太阳扁率分别为 10^{-5} 和 5.2×10^{-5} 时的数值。 第三行是迪克采用 0.″05 的太阳引力扁度时的数值。这个引力扁度相应于太阳的扁率 $\alpha=5.2\times10^{-5}$。由于他在利用(5.143)式时忽略了太阳的自转效应，取 $h=\frac{2}{3}\alpha$，因此他的计算结果比第二行的数值要大，约是它的 $\frac{5}{3}$ 左右。第四行是克勒门斯 (Clemence) 在计算行星星历表时估计太阳扁率对水星和地球所产生进动的数值。显然他推算的数值要比实际数值小一个数量级。

由表 5-2 可以看出当采用史瓦茨西德度规时，利用广义相对论得到水星近日点经度进动的数值(每百年 42.″98)与实际观测到的偏差 (每百年 43.″0) 十分相符，这是广义相对论重要验证之一。如果进一步考虑到太阳扁率的影响，那么水星近日点经度进动的数值比实际观测到的数值又要大一些，因此人们试图对原有的相对论理论也进行一些相应的修正。这些问题还有待于作进一步的研究。

第六章 数值方法

除了二体问题以及少数几个中间轨道的力学模型外，绝大多数的天体运动方程不可能用解析方法得到严格的解．前一章中我们概要地介绍了用级数方法求近似解，在这一章中将介绍用微分方程的数值方法解天体的运动方程．

早在 20 世纪初，柯威耳 (Cowell) 和克洛美林 (Crommelin) 就用数值方法计算了哈雷彗星的轨道，后人称他们的方法为柯威耳方法．原则上讲，常微分方程中的数值方法都可以用于解天体的运动方程．电子计算机问世后，数值方法更显示了它的独有的威力和生命力．目前数值方法不仅仅限于研究行星、彗星、小行星等太阳系的天体，也适用于对人造卫星、月球火箭、行星际火箭以及一些小的恒星系统的动力学研究．数值方法与分析方法和定性方法结合应用，可对不少动力学系统的稳定性问题、周期解的存在问题、奇点和碰撞等问题进行探讨．数值方法已成为天体力学中一种非常有实用价值的，被普遍采用的方法．

数值方法不同于分析方法，分析方法给出天体运动方程解的近似级数表达式，而数值方法给出的是一系列离散时刻解的近似值，它是通过许多近似公式和大量的数值计算来实现的，这必然带来一个误差问题．误差的累积和传递是考虑一个数值方法的优劣和取舍的主要依据．

数值方法的优点在于它几乎适用各类天体的运动方程．前一章中我们曾经指出当行星的偏心率和倾角较大时，用级数解行星运动方程会出现困难，数值方法则不受这一限制．用小步长，和高速电子计算机解行星运动方程可以达到很高的精度．当然，如果天体的运动方程出现奇点，会给数值解法造成困难，这时需要对原方程实行正规化变换．

§1 差分及插值公式

1. 插值法

在实际问题中，往往会遇到这样的情况：我们事先并不知道某一个自变量 t 的函数 $f(t)$ 的解析表达式，然而当自变量在区间 $[a, b]$ 上取某些离散的值 t_0、t_1、……t_n 时，可通过实验或观测得到函数的相应值 $x_0 = f(t_0)$、$x_1 = f(t_1)$、$x_2 = f(t_2)$、…$x_n = f(t_n)$. 插值法就是要寻求一个解析函数 $\varphi(t)$，使它满足 $\varphi(t_i) = x_i$ $(i = 0, 1, 2 \cdots\cdots n)$，并用 $\varphi(t)$ 近似表示形式未知的函数 $f(t)$. $\varphi(t)$ 称为插值函数，$f(t)$ 称为被插值函数，$[a, b]$ 称作插值区间，t_0、$t_1 \cdots\cdots t_n$ 为插值点. 为实际应用方便，我们希望插值函数尽可能形式简单，易作微分，积分等的运算. 代数多项式是理想的插值多项式，因此可以设想 $\varphi(t)$ 的形式为

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) L_i(t), \tag{6.1}$$

其中 $L_i(t)$ 满足

$$L_i(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\cdots\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots\cdots(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\cdots\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots\cdots(t_i-t_n)}. \tag{6.2}$$

由 (6.1)、(6.2)式所定义的 $\varphi(t)$ 是一个 n 次多项式，称为拉格朗日插值多项式. $L_i(t)$ 称为插值基函数.

用插值函数 $\varphi(t)$ 表示被插值函数 $f(t)$ 时是有误差的，记：

$$R(t) = f(t) - \varphi(t), \tag{6.3}$$

$R(t)$ 称作余式，它的大小反映了 $\varphi(t)$ 逼近 $f(t)$ 的程度. 不难证明：

$$R(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-t_0)(t-t_1),\cdots(t-t_n), \tag{6.4}$$

上式中 $\xi \in (a, b)$，$f^{(n+1)}(\xi)$ 为 $f(t)$ 的 $n+1$ 阶导数在 $x = \xi$ 处的值.

2. 差分

若插值点是等距离分布的，即 $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$, $\cdots\cdots x_n=a+nh$, 这里的 h 为一常数称为步长。函数 $f_i=f(a+ih)$。定义函数 $f(a+ih)$ 的差分如下：

一阶向前差分以算子Δ表示。

$\Delta f_0=f_1-f_0$, $\Delta f_1=f_2-f_1$, $\cdots$, $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$.

二阶向前差分，

$\Delta^2 f_0=\Delta f_1-\Delta f_0$, $\Delta^2 f_1=\Delta f_2-\Delta f_1$, $\cdots$, $\Delta^2 f_i=\Delta f_{i+1}-\Delta f_i$.

$\vdots$

n阶向前差分，

$\Delta^n f_0=\Delta^{n-1}f_1-\Delta^{n-1}f_0$, $\Delta^n f_1=\Delta^{n-1}f_1-\Delta^{n-1}f_0$, $\cdots$,

$\Delta^n f_i=\Delta^{n-1}f_{i+1}-\Delta^{n-1}f_i$.

一阶向后差分以算子∇表示，

$\nabla f_1=f_1-f_0$, $\nabla f_2=f_2-f_1$, $\cdots$, $\nabla f_i=f_i-f_{i-1}$.

二阶向后差分，

$\nabla^2 f_1=\nabla f_1-\nabla f_0$, $\nabla^2 f_2=\nabla f_1-\nabla f_0$, $\cdots$,

$\nabla^2 f_i=\nabla f_i-\nabla f_{i-1}$,

$\vdots$

$\nabla^n f_1=\nabla^{n-1}f_1-\nabla^{n-1}f_0$, $\nabla^n f_1=\nabla^{n-1}f_1-\nabla^{n-1}f_0$, $\cdots$,

$\nabla^n f_i=\nabla^{n-1}f_i-\nabla^{n-1}f_{i-1}$.

一阶中心差分以δ表示，

$\delta f_{\frac{1}{2}}=f_1-f_0$, $\delta f_{\frac{3}{2}}=f_2-f_1$, $\cdots$, $\delta f_{i+\frac{1}{2}}=f_{i+1}-f_i$

二阶中心差分

$\delta^2 f_0=\delta f_{\frac{1}{2}}-\delta f_{-\frac{1}{2}}$, $\delta^2 f_1=\delta f_{\frac{3}{2}}-\delta f_{\frac{1}{2}}$, $\cdots$,

$\delta^2 f_i=\delta f_{i+\frac{1}{2}}-\delta f_{i-\frac{1}{2}}$.

$\vdots$

n阶中心差分为　$\delta^n f_i=\delta^{n-1}f_{i+\frac{1}{2}}-\delta^{n-1}f_{i-\frac{1}{2}}$, （$n$为偶数）

$\delta^n f_{i+\frac{1}{2}}=\delta^{n-1}f_{i+1}-\delta^{n-1}f_i$, （$n$为奇数）

所以我们可以造一差分表。

表 6-1 差 分 表

变量	函数	向前差分						
t_{-3}	f_{-3}							
		Δf_{-3}						
t_{-2}	f_{-2}		$\Delta^2 f_{-3}$					
		Δf_{-2}		$\Delta^3 f_{-3}$				
t_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$		$\Delta^4 f_{-3}$			
		Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$		$\Delta^5 f_{-3}$		
t_0	f_0		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$		$\Delta^6 f_{-3}$	
		Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$		$\Delta^5 f_{-2}$		$\Delta^7 f_{-3}$
t_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		$\Delta^4 f_{-1}$		$\Delta^6 f_{-2}$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$		$\Delta^5 f_{-1}$		
t_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$			
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$				
t_3	f_3		$\Delta^2 f_2$					
		Δf_3						
t_4	f_4							

变量	函数	中心差分						
t_{-3}	f_{-3}							
		$\delta f_{-\frac{5}{2}}$						
t_{-2}	f_{-2}		$\delta^2 f_{-2}$					
		$\delta f_{-\frac{3}{2}}$		$\delta^3 f_{-\frac{3}{2}}$				
t_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		$\delta^4 f_{-1}$			
		$\delta f_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^5 f_{-\frac{1}{2}}$		
t_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$		$\delta^6 f_0$	
		$\delta f_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{1}{2}}$		$\delta^5 f_{\frac{1}{2}}$		$\delta^7 f_{\frac{1}{2}}$
t_1	f_1		$\delta^2 f_1$		$\delta^4 f_1$		$\delta^6 f_1$	
		$\delta f_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{3}{2}}$		$\delta^5 f_{\frac{3}{2}}$		
t_2	f_2		$\delta^2 f_2$		$\delta^4 f_2$			
		$\delta f_{\frac{5}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{5}{2}}$				
t_3	f_3		$\delta^2 f_3$					
		$\delta f_{\frac{7}{2}}$						
t_4	f_4							

变量	函数	向后差分						
t_{-3}	f_{-3}							
		∇f_{-2}						
t_{-2}	f_{-2}		$\nabla^2 f_{-1}$					
		∇f_{-1}		$\nabla^3 f_0$				
t_{-1}	f_{-1}		$\nabla^2 f_0$		$\nabla^4 f_1$			
		∇f_0		$\nabla^3 f_1$		$\nabla^5 f_2$		
t_0	f_0		$\nabla^2 f_1$		$\nabla^4 f_2$		$\nabla^6 f_3$	
		∇f_1		$\nabla^3 f_2$		$\nabla^5 f_3$		$\Delta^7 f_4$
t_1	f_1		$\nabla^2 f_2$		$\nabla^4 f_3$		$\Delta^6 f_4$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$		$\nabla^5 f_4$		
t_2	f_2		$\nabla^2 f_3$		$\nabla^4 f_4$			
		∇f_3		$\nabla^3 f_4$				
t_3	f_3		$\nabla^2 f_4$					
		∇f_4						
t_4	f_4							

从差分表可以看出对于同一角标的各阶向前差分在表中自左向右在一条下降的斜线上，同角标的各阶向后差分在自左向右的一条上升的斜线上，而同角标的中心差分在一条水平线上。

由差分的定义可知对于一个函数的差分值既可以用向前差分表示也可以用向后差分和中心差分表示，如 $\Delta f_0=\delta f_{\frac{1}{2}}=\nabla f_1$，$\Delta^2 f_0=\delta^2 f_1=\nabla^2 f_2\cdots\cdots$ 等，对于 n 阶差分三种差分的一般关系是：

$$\Delta^n f_i=\delta^n f_{i+\frac{n}{2}}=\nabla^n f_{i+n}. \tag{6.5}$$

根据差分的定义，一个函数的 n 阶差分可以由 $n+1$ 个函数值来表示，以向前差分为例：

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta f_i=f_{i+1}-f_i\\
&\Delta^2 f_i=\Delta f_{i+1}-\Delta f_i=f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i\\
&\Delta^3 f_i=\Delta^2 f_{i+1}-\Delta^2 f_i=f_{i+3}-3f_{i+2}+3f_{i+1}-f_i\\
&\vdots\\
&\Delta^n f_i=\Delta^{n-1} f_{i+1}-\Delta^{n-1} f_i=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f_{i+n-j}
\end{aligned}\right\}. \tag{6.6}$$

上式中

$$\binom{n}{j}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-j+1)}{j!}=\frac{n!}{j!(n-j)!},$$

同样有：

$$\nabla^n f_i=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f_{i-j}, \tag{6.7}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^n f_{i+\frac{1}{2}}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f_{i+\frac{n+1}{2}-j} &&(n\text{ 为奇数})\\
&\delta^n f_i=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f_{i+\frac{n}{2}-j} &&(n\text{ 为偶数})
\end{aligned}\right\}. \tag{6.8}$$

3. 均差

一个函数 $f(x)$ 在两点 x_i、x_j 之间的平均变率称为一阶均差，

用 $f(t_i, t_j)$ 表示之：

$$f(t_i, t_j) = \frac{f(t_j) - f(t_i)}{t_j - t_i}。 \tag{6.9}$$

两个一阶均差的平均变率称为二阶均差，

$$f(t_{i-1}, t_i, t_{i+1}) = \frac{f(t_{i+1}, t_i) - f(t_i, t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \tag{6.10}$$

由此可以类推三阶、四阶等高阶均差，在 t_0、t_1、$\cdots$ t_n，$n+1$ 个插值点上，函数 $f(t)$ 有 $n+1$ 个值，可以算出 n 阶均差，若在$[a,b]$上除上面所说的 $n+1$ 个插值点以外，再增加任意一点 t，根据均差的定义有：

$$f(t, t_0) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

则
$$f(t) = f(t_0) + f(t, t_0)(t - t_0)。 \tag{6.11}$$

$$f(t, t_0, t_1) = \frac{f(t, t_0) - f(t_0, t_1)}{t - t_1},$$

则
$$f(t, t_0) = f(t_0, t_1) + f(t, t_0, t_1)(t - t_1), \tag{6.12}$$

$$\vdots$$

$$f(t, t_0, t_1, \cdots, t_n) = \frac{f(t, t_0, \cdots, t_{n-1}) - f(t_0, t_1, \cdots, t_n)}{t - t_n},$$

故
$$f(t, t_0, \cdots t_{n-1}) = f(t_0, t_1, \cdots t_n) + f(t, t_0, \cdots, t_n)(t - t_n)。 \tag{6.13}$$

从 (6.13) 式—(6.11) 式看出低阶均差可以由高阶均差表示，故将上面的公式自后而前逐次代入得：

$$\begin{aligned} f(t) = {} & f(t_0) + f(t_0, t_1)(t - t_0) + f(t_0, t_1, t_2)(t - t_0)(t - t_1) \\ & + \cdots + f(t_0, t_1, \cdots, t_n)(t - t_0)(t - t_1)\cdots(t - t_{n-1}) \\ & + R_n(t)。 \end{aligned} \tag{6.14}$$

(6.14) 式称为均差插值多项式，余项

$$R_n(t) = f(t, t_0, \cdots, t_n)(t - t_0)(t - t_1)\cdots(t - t_n)。 \tag{6.15}$$

4. 牛顿向前插值公式

假设插值点是等距离分布的，$t_0 = a$，$t_1 = a + h$，$\cdots$，$t_n =$

$a+nh$，它们的步长为 h，并设任意的 $t=t_0+sh$，s 也允许是分数，这时(6.14)式成为

$$f(t)=f(t_0)+s\Delta f_0+\frac{1}{2}s(s-1)\Delta^2 f_0+\cdots+\binom{s}{n}\Delta^n f_0. \tag{6.16}$$

利用向前差分和中心差分的关系，由(6.16)式可得到用中心差分表示的牛顿向前插值公式：

$$\begin{aligned}f(t)=f(t_0)&+s\delta f_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}s(s-1)\delta^2 f_1\\&+\frac{1}{3!}s(s-1)(s-2)\delta^3 f_{\frac{3}{2}}\\&+\cdots+\binom{s}{n}\delta^n f_{\frac{n}{2}}.\end{aligned} \tag{6.17}$$

5. 牛顿向后插值公式

从插值多项式的余式(6.15)可以看出，$t=t_0+sh$ 与插值点 t_0、t_1、$\cdots$、t_n 愈靠近，误差 $R_n(t)$ 就愈小，若将 $f(t_0)$、$f(t_1)$、$\cdots$、$f(t_n)$ 顺序排成一个表，牛顿向前插值公式(6.17)显然适合于 t 值在表头的情况．假如 t 值接近表尾，设 $t=t_0-sh$，并依次选择 t_0、t_{-1}、$\cdots$、t_{-n} 作为插值点，那么从(6.14)式可以推出牛顿向后插值公式：

$$\begin{aligned}f(t)=f_0&-s\nabla f_0+\frac{1}{2}s(s-1)\nabla^2 f_0\\&-\frac{1}{3!}s(s-1)(s-2)\nabla^3 f_0\\&+\cdots\cdots+(-1)^n\binom{s}{n}\nabla^n f_0,\end{aligned} \tag{6.18}$$

同样利用 ∇ 与 δ 的关系式(6.5)，可得到用中心差分表示的牛顿向后插值公式：

$$f(t)=f_0-s\delta f_{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}s(s-1)\delta^2 f_{-1}$$

$$-\frac{1}{3!}s(s-1)(s-2)\delta^3 f_{-\frac{3}{2}}$$

$$+\cdots+(-1)^n\binom{n}{s}\delta^n f_{-\frac{n}{2}}. \qquad (6.19)$$

6. 高斯插值公式和斯特林插值公式

如果 $t=a+sh$ 的值接近表的中部，这时插值点顺次取 t_0、t_1、t_{-1}、t_2、t_{-2}、…，很容易从(6.14)式得到高斯第一插值公式：

$$\begin{aligned}
f(s)=&f_0+s\delta f_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2!}s(s-1)\delta^2 f_0+\frac{1}{3!}s(s-1)(s+1)\delta^3 f_{\frac{1}{2}}\\
&+\frac{1}{4!}s(s-1)(s+1)(s-2)\delta^4 f_0\\
&+\frac{1}{5!}s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)\delta^5 f_{\frac{1}{2}}\\
&+\cdots+\frac{1}{(2n)!}s(s-1)(s+1)(s-2)\\
&\times(s+2)\cdots(s^2-\overline{n-1}^2)(s-n)\delta^{2n} f_0\\
&+\frac{1}{(2n+1)!}s(s-1)(s+1)\cdots(s^2-n^2)\delta^{2n+1} f_{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \qquad (6.20)$$

如果将插值点的排列次序改为 t_0、t_{-1}、t_1、t_{-2}、t_2、…，便得高斯第二插值公式：

$$\begin{aligned}
f(s)=&f_0+s\delta f_{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2!}s(s+1)\delta^2 f_0\\
&+\frac{1}{3!}s(s+1)(s-1)\delta^3 f_{-\frac{1}{2}}\\
&+\frac{1}{4!}s(s+1)(s-1)(s+2)\delta^4 f_0\\
&+\frac{1}{5!}s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)\delta^5 f_{-\frac{1}{2}}\\
&+\cdots+\frac{1}{(2n)!}s(s+1)(s-1)(s+2)
\end{aligned}$$

$$\times (s-2)\cdots(s-\overline{n-1})(s+n)\delta^{2n}f_0$$

$$+\frac{1}{(2n+1)!}s(s+1)(s-1)(s+2)(s-2)\cdots$$

$$(s^2+n^2)\delta^{2n+1}f_{-\frac{1}{2}}. \tag{6.21}$$

将(6.20)式和(6.21)式相加求平均值得:

$$f(s)=f_0+\frac{1}{2!}s^2\delta^2f_0+\frac{1}{4!}s^2(s^2-1^2)\delta^4f_0$$

$$+\frac{1}{6!}s^2(s^2-1^2)(s^2-2^2)\delta^6f_0+\cdots$$

$$+\frac{1}{(2n)!}s^2(s^2-1^2)(s^2-2^2)\cdots(s^2-\overline{n-1}^2)\delta^{2n}f_0$$

$$+s\delta f_0+\frac{1}{3!}s(s^2-1^2)\delta^3f_0$$

$$+\frac{1}{5!}s(s^2-1^2)(s^2-2^2)\delta^5f_0+\cdots$$

$$+\frac{1}{(2n+1)!}s(s^2-1^2)(s^2-2^2)\cdots$$

$$\times(s^2-n^2)\delta^{2n+1}f_0. \tag{6.22}$$

上式中

$$\delta f_0=\frac{1}{2}(\delta f_{-\frac{1}{2}}+\delta f_{\frac{1}{2}})$$

$$\delta^3f_0=\frac{1}{2}(\delta^3f_{-\frac{1}{2}}+\delta^3f_{\frac{1}{2}})$$

$$\vdots$$

$$\delta^{2n+1}f_0=\frac{1}{2}(\delta^{2n+1}f_{-\frac{1}{2}}+\delta^{2n+1}f_{\frac{1}{2}}).$$

(6.22)式称为斯特林插值公式。

7. 贝塞尔插值公式

假设插值点的排列次序是 t_1、t_0、t_2、$t_{-1}\cdots$。并设 $t=t_1+s'h$，同样可以推导出高斯第二插值公式，这时第一个插值点向后移动一步(是 t_1 而不是 t_0)，因此只要将(6.21)式中各阶差分的角标增加1即得:

$$
\begin{aligned}
f(s) = f_1 &+ s'\delta f_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2!}s'(s'+1)\delta^2 f_1 \\
&+ \frac{1}{3!}s'(s'+1)(s'-1)\delta^3 f_{\frac{3}{2}} \\
&+ \frac{1}{4!}s'(s'+1)(s'-1)(s'+2)\delta^4 f_1 \\
&+ \frac{1}{(2n)!}s'(s'+1)(s'-1)(s'+2)(s'-2) \\
&\cdots(s'-\overline{n-1})(s'+n)\delta^{2n} f_1 \\
&+ \frac{1}{(2n+1)!}s'(s'+1)(s'-1)(s'+2)(s' \\
&-2)\cdots(s'^2-n^2)\delta^{2n+1} f_{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
\qquad (6.23)
$$

由 $t = t_0 + sh = t_1 + s'h$ 得 $s' = s - 1$，故上式可写成：

$$
\begin{aligned}
f(t) = f_1 &+ (s-1)\delta f_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2!}s(s-1)\delta^2 f_1 \\
&+ \frac{1}{3!}s(s-1)(s-2)\delta^3 f_{\frac{3}{2}} \\
&+ \frac{1}{4!}s(s-1)(s-2)(s+1)\delta^4 f_1 \\
&+ \frac{1}{5!}s(s-1)(s-2)(s+1)(s-3)\delta^5 f_{\frac{3}{2}} + \cdots \\
&+ \frac{1}{(2n)!}s(s^2-1^2)(s^2-2) \\
&\cdots(s^2-\overline{n-1}^2)(s-n)\delta^{2n} f_1 \\
&+ \frac{1}{(2n+1)!}s(s^2-1)(s^2-2) \\
&\cdots(s^2-\overline{n-1}^2)(s-n)(s-\overline{n+1})\delta^{2n+1} f_{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
\qquad (6.24)
$$

将(6.24)式与(6.20)式取平均值得贝塞尔插值公式：

$$
f(t) = \frac{1}{2}(f_0 + f_1) - \frac{1}{2}(f_1 - f_0) + s\delta f_{\frac{1}{2}}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{s(s-1)}{2!}\frac{1}{2}\left(\delta^2 f_0+\delta^2 f_1\right) \\
&+\frac{1}{3!}s(s-1)\left(s-\frac{1}{2}\right)\delta^3 f_{\frac{1}{2}} \\
&+\frac{1}{4!}s(s^2-1^2)(s-2)\frac{1}{2}\left(\delta^4 f_0+\delta^4 f_1\right) \\
&+\frac{1}{5!}s(s^2-1)(s-2)\left(s-\frac{1}{2}\right)\delta^5 f_{\frac{1}{2}}+\cdots \\
&+\frac{1}{(2n)!}s(s^2-1^2)(s^2-2^2)(s^2-3^2) \\
&\cdots(s^2-\overline{n-1}^2)(s-n)\frac{1}{2}\left(\delta^{2n}f_0+\delta^{2n}f_1\right) \\
&+\frac{1}{(2n+1)!}s(s^2-1)(s^2-2^2)(s^2-3^2) \\
&\cdots(s^2-\overline{n-1}^2)(s-n)\left(s-\frac{1}{2}\right)\delta^{2n+1}f_{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

贝塞尔插值公式是天文计算中常用的插值公式之一，它也适用于欲求的函数值 $f(s)$ 在表的中部。

§2 常微分方程数值解概述

常微分方程的求解问题有两大类，即初值问题和边值问题。初值问题是要解决在自变量的一个初值处给定条件的那些问题，而边值问题是要解决在自变量的两个值处给定条件的那些问题。解天体的运动方程属于初值问题。

以一个一阶常微分方程：

$$
\frac{dx}{ds}=f(s, x) \tag{6.26}
$$

为例，若右函数 $f(s, x)$ 是定义在 (s, x) 平面上的 D 区域内的一个连续函数，且有 $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $f(s, x)$ 有界，即

$$
|f(s, x)|\leqslant M, \quad |f_x(s, x)|\leqslant K,
$$

关于微分方程(6.26)的初值问题指在 D 内求方程(6.26)满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解,即求 $x(t)$，使满足

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f(t,x(t))\\ x_0&=x(t_0)\end{aligned}\right\}。\tag{6.27}$$

积分(6.27)式得:

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,x)dt,\tag{6.28}$$

这表明解微分方程(6.27)相当于求积分(6.28)，若(6.28)不可积，可用数值计算求近似解，即将自变量 t 取离散值 $t_0、t_1、t_2\cdots t_n$，求对应的函数值 $x_0、x_1、x_2\cdots x_n$。逐次积分(6.28)式:

$$\left.\begin{aligned}x(t_1)&=x_0+\int_{t_0}^{t_1}f(t,x)dt\\ x(t_2)&=x_0+\int_{t_0}^{t_2}f(t,x)dt\\ &=x_0+\int_{t_0}^{t_1}f(t,x)dt+\int_{t_1}^{t_2}f(t,x)dt\\ &=x(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}f(t,x)dt\\ &\vdots\\ x(t_n)&=x(t_{n-1})+\int_{t_{n-1}}^{t_n}f(t,x)dt\end{aligned}\right\}。\tag{6.29}$$

在积分上式的过程中，若被积函数 $f(t,x)$ 中的 x 用前一步的近似值代替,并设 $t_0、t_1、t_2\cdots t_n$ 为等间距分布的，其步长为 h，则有

$$\left.\begin{aligned}x_0&=x(t_0)\\ x_1&=x_0+f(t_0,x_0)h\\ x_2&=x_1+f(t_1,x_1)h\\ &\vdots\\ x_{n+1}&=x_n+f(t_n,x_n)h\end{aligned}\right\}。\tag{6.30}$$

上式中 $x_0、x_1、x_2\cdots x_n$ 表示 $x(t_0)、x(t_1)、x(t_2)\cdots x(t_n)$ 的近似值，

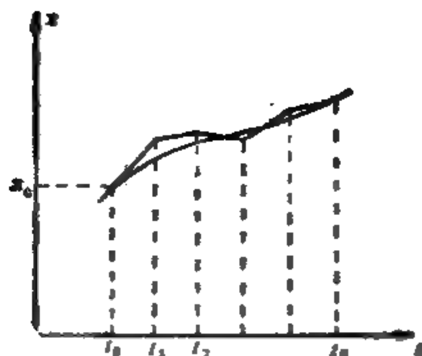


图 6-1

从几何上分析，解方程(6.27)就是要在 (t, x) 平面上寻找一条曲线 $x(t)$。这一曲线过 (t_0, x_0) 点，并且在这一点的斜率为 $f(t_0, x_0)$，而公式(6.30)表明我们用了一条折线近似代替曲线 $x(t)$（图 6-1）。这一方法称为欧拉折线法。用这种方法逐步计算 $x(t)$ 的近似值时，只用到前一步的结果，因此这一方法称作单步法。从(6.30)看计算 x_i 时右函数中不含 x_i，故(6.30)式是显式公式。

如果用梯形公式计算(6.29)的积分得：

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \frac{1}{2} h(f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1)) \\
x_2 &= x_1 + \frac{1}{2} h(f(t_1, x_1) + f(t_2, x_2)) \\
&\vdots \\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2} h(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}))
\end{aligned}\right\}. \qquad (6.31)
$$

从(6.31)看出在求 x_i 时，方程右函数中也含 x_i，这种公式称为隐式公式，必须通过解一个含 x_i 的方程才得到 x_i，这将会遇到运算上的困难，因此实际上常常将(6.30)和(6.31)式联合使用，得到简单、易算的预报——校正公式：

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1}^{(0)} &= x_n + hf(t_n, x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^{(0)})\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

假定前面一步的计算结果是精确的，每计算一步时产生的误差 $x(t_{i+1}) - x_{i+1}$ 称为截断误差，事实上前一步也有截断误差，这样必然是每一步的截断误差将传递到下一步的计算值中，产生了累积误差．我们把累积后的误差称为总体截断误差．截断误差的大小以及累积的快慢是判断一个数值方法优劣的重要依据．

在这里介绍一种讨论数值方法截断误差的方法．

根据台劳展开式

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_n h + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_n h^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{m!}\left(\frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m}\right)_n h^m + R_m(t), \end{aligned} \tag{6.33}$$

其中余式（截断误差）为

$$R_m(t) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\frac{\mathrm{d}^{m+1}x(\xi)}{\mathrm{d}t^{m+1}}, \qquad t_n < \xi < t_{n+1}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)$ 所以

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x},$$

定义算子 $D = \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial x}$，则(6.33)式成为

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + hf_n + \frac{h^2}{2}Df_n + \frac{h^3}{3!}D^2f_n \\ &\quad + \cdots + \frac{h^m}{m!}D^{m-1}f_n + R_m(t), \end{aligned} \tag{6.34}$$

$$R_m(t) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}D^m f(\xi, x_n). \tag{6.35}$$

(6.34) 式表明，假如能求出函数 $f(t, x)$ 对 t 的各阶导数，便可以通过(6.34)式计算 x_{n+1}，因此(6.34)式也称为台劳级数法．

将(6.34)式与(6.30)式相减,得欧拉折线法的截断误差为

$$x(t_{n+1}) - x_{n+1} = \frac{1}{2} h^2 Df(\xi, x_n), \tag{6.36}$$

所以此法的误差为 $O(h^2)$。

将梯形方法的预报——校正公式(6.32)写成:

$$x_{n+1} = x(t_n) + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2, \tag{6.37}$$

其中

$$k_1 = hf(t_n, x_n), \tag{6.38}$$

$$k_2 = hf(t_n + h, x_n + k_1), \tag{6.39}$$

将 k_2 做台劳展开:

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(t_n + h, x_n + k_1) \\ &= h\left[f(t_n, x_n) + h\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n + k_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n + O(h^2)\right] \\ &= hf(t_n, x_n) + h^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n \\ &\quad + h^2 f(t_n, x_n)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n + O(h^3). \end{aligned}$$

上式代入(6.37)式得:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x(t_n) + \frac{1}{2} hf(t_n, x_n) + \frac{1}{2} hf(t_n, x_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} h^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n + \frac{1}{2} h^2 f(t_n, t_n)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n + O(h^3) \\ &= x(t_n) + hf(t_n, x_n) + \frac{1}{2} h^2 Df_n + O(h^3), \end{aligned} \tag{6.40}$$

将(6.34)式与(6.40)式相减,得梯形法的预报——校正公式的截断误差的数量级 $x(t_{n+1}) - x_{n+1} \approx O(h^3)$,可见它比欧拉折线法精度高一阶.

§3 龙格-库塔法

从前一节的介绍中可以看出,欧拉折线法实质上是一阶台劳

级数法(在台劳展开式(6.34)中右端截取到 h 的一次幂项),梯形法是二阶台劳级数法。这两个方法的共同点是回避了求函数 $f(t, x)$ 的各阶导数,而是用 $f(t, x)$ 在某些点上的值的线性组合来代替 $f(t,x)$ 的一阶和二阶导数。这也是龙格-库塔 (Range-Kutta) 法的基本思想。

令 $f(t, x)$ 在更多个点上的线性组合构成一个计算 x_{n+1} 的近似公式,使这一公式与台劳展开式(6.34)的前面几项吻合,从而得到比梯形公式精度更高的近似计算公式。最常用的是四阶龙格-库塔法。

设:
$$x_{n+1} = x_n + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4, \tag{6.41}$$

其中
$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n) \\ k_2 &= hf(t_n + b_1h, x_n + \alpha_1k_1) \\ k_3 &= hf(t_n + b_2h, x_n + \alpha_2k_1 + \alpha_3k_2) \\ k_4 &= hf(t_n + b_3h, x_n + \alpha_4k_1 + \alpha_5k_2 + \alpha_6k_3) \end{aligned}\right\}, \tag{6.42}$$

(6.41)和(6.42)式中的 a_1、a_2、$\cdots$, b_1、b_2、$\cdots$、α_1、α_2、$\cdots$ 等都是待定的系数。在台劳展开式(6.34)右端取到前五项,则有:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + hf_n + \frac{1}{2}h^2Df_n + \frac{1}{3!}h^3\left[D^2f_n + Df_n\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n\right] \\ + \frac{1}{4!}h^4\left[D^3f_n + D^2f_n\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n \right. \\ \left. + Df_n\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_n + 3Df_nD\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_n\right]. \end{aligned} \tag{6.43}$$

将(6.42)中的 k_1、k_2、k_3、k_4 也作台劳展开,并精确到 $O(h^4)$ 项,截断误差为 $O(h^5)$。代入(6.41)式后与(6.43)式比较 h 的同次幂系数,可以确定:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = a_4 = \frac{1}{6}, \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{3} \\ &b_1 = b_2 = \alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2} \\ &b_3 = \alpha_6 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{6.44}$$

因此四阶龙格-库塔公式为

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{3}k_2+\frac{1}{3}k_3+\frac{1}{6}k_4, \tag{6.45}$$

$$\left.\begin{aligned}
&k_1=hf(t_n, x_n)\\
&k_2=hf\left(t_n+\frac{h}{2},\quad x_n+\frac{k_1}{2}\right)\\
&k_3=hf\left(t_n+\frac{h}{2},\quad x_n+\frac{k_2}{2}\right)\\
&k_4=hf(t_n+h,\ x_n+k_3)
\end{aligned}\right\}. \tag{6.46}$$

同样的道理可以得到更高阶的龙格-库塔公式,只是推导更烦琐而已.

假如欲求解的是一个方程组:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)\\
&\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)\\
&\vdots\\
&\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}\right\},$$

用矢量 $\boldsymbol{X}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{F}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 表示上面的方程组,则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}), \tag{6.47}$$

这时相应的四阶龙格-库塔公式是:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_{n+1}=\boldsymbol{X}_n+\frac{1}{6}\boldsymbol{K}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{K}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{K}_3+\frac{1}{6}\boldsymbol{K}_4\\
&\boldsymbol{K}_1=h\boldsymbol{F}(t_n, \boldsymbol{X}_n)\\
&\boldsymbol{K}_2=h\boldsymbol{F}\left(t_n+\frac{h}{2},\quad \boldsymbol{X}_n+\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_1\right)\\
&\boldsymbol{K}_3=h\boldsymbol{F}\left(t_n+\frac{h}{2},\quad \boldsymbol{X}_n+\frac{1}{2}\boldsymbol{K}_2\right)\\
&\boldsymbol{K}_4=h\boldsymbol{F}(t_n+h,\ \boldsymbol{X}_n+\boldsymbol{K}_3)
\end{aligned}\right\}. \tag{6.48}$$

任何一个高阶微分方程都可以化为一个一阶的微分方程组，因此(6.48)式也适用于解高阶方程.

龙格-库塔法是常微分方程数值解中最常用的方法，这一方法的优点是：

① 因为此法是单步显式的，只要确定初值以后，很容易一直计算下去.

② 可以在计算过程中任意改变步长，以达到缩短机时或提高精度的目的.

③ 编制计算程序比较容易.

此法的主要缺点是与其他精度相近似的方法相比，计算量大，需占用较多的机时. P 阶的龙格-库塔法的误差为 $O(h^{p+1})$ 量级，但精确的误差较难估算.

§4 阿当姆斯方法

在积分(6.29)式时，若用一个插值多项式 $\varphi(t)$ 来代替被积函数 $f(t, x)$，譬如以 t_{n-2}、t_{n-1}、t_n、t_{n+1} 为四个插值点，设 $t = t_n + sh$，$dt = hds$，得到牛顿向前插值公式为

$$\varphi(t, x) = f_{n-2} + (2+s)\delta f_{n-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(s+1)(s+2)\delta^2 f_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{3!}s(s+1)(s+2)\delta^3 f_{n-\frac{1}{2}} + \cdots.$$

应用(6.8)式各阶差分可以用函数表示，因此上式成为

$$\varphi(t, x) = f(t_{n-2}, x_{n-2})\frac{1}{6}s(s-1)(s+1)$$

$$+ f(t_{n-1}, x_{n-1})\frac{1}{2}s(s+2)(s-1)$$

$$+ f(t_n, x_n)\frac{1}{2}(s+2)(s+1)(s-1)$$

$$+ f(t_{n+1}, x_{n+1})\frac{1}{6}(s+2)(s+1)s + \cdots. \quad (6.49)$$

将(6.49)代入

$$x_{n+1}=x_n+\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t,x)dt$$
$$=x_n+\int_0^1\varphi(t,x)dt$$
$$=x_n+\frac{h}{24}[f(t_{n-2},x_{n-2})-5f(t_{n-1},x_{n-1})$$
$$+19f(t_n,x_n)+9f(t_{n+1},x_{n+1})], \qquad (6.50)$$

(6.50) 称为四阶阿当姆斯内插公式，因为等式右端也含 x_{n+1}，所以是隐式的。

将插值点取作 t_{n-3}、t_{n-2}、t_{n-1}、t_n，用同样的推导过程可得四阶阿当姆斯外推公式：

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h}{24}[55f(t_n,x_n)-59f(t_{n-1},x_{n-1})$$
$$+37f(t_{n-2},x_{n-2})-9f(t_{n-3},x_{n-3})]. \qquad (6.51)$$

(6.51) 式是显式的，只要已知前四个插值点的 x 值，便可预推后一个值。应用时可将(6.50)和(6.51)式结合起来，用(6.51)外推一个 $x_{n+1}^{(0)}$，代入(6.50)右端得到校正值。因此(6.51) 和 (6.50)又称为阿当姆斯预报——校正公式。

将(6.50)和(6.51)式的右端函数中 $f(t_{n-2},x_{n-2})$，$f(t_{n-1},x_{n-1})$ 等在 (t_n,x_n) 点作台劳展开，再与(6.33)式比较，可以估算出阿当姆斯预报——校正公式精度到 $O(h^4)$ 项，故称为四阶阿当姆斯公式。对于一般 P 阶的，误差为 $O(h^{P+1})$ 的阿当姆斯公式是：

$$\left.\begin{aligned}&\text{预报公式}\quad x_{n+1}=x_n+h\sum_{i=1}^{p}\beta_i f_{n+1-i}\\&\text{校正公式}\quad x_{n+1}=x_n+h\sum_{i=1}^{p}\beta_i^* f_{n+2-i}\end{aligned}\right\}, \qquad (6.52)$$

上式中 β、β^* 为系数。

用阿当姆斯公式计算时，起步需要多个初值，因此它是一个多步法。多步法的初值可以用单步法计算（如用龙格——库塔法）。此方法的优点是在相同精度要求之下，计算量较小，因为每向后算

一步，只要计算一个 $f(t, x)$ 的值即可。它的主要缺点是不能轻易改变步长，除非重新计算初值。

§5 柯威耳方法

以直角坐标为变量的天体运动方程，绝大多数有：

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2}=\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) \tag{6.53}$$

的形式，这类方程的右函数不含 $\boldsymbol{X}$ 的一阶导数 $\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}$，用常规的方法首先将(6.53)化为一个一阶方程组，然后进行数值计算，在计算过程中除得到 $\boldsymbol{X}$ 外，还得到 $\dot{\boldsymbol{X}}$，而 $\dot{\boldsymbol{X}}$ 往往不是我们所需要的，这就浪费了不少的机时。对于象(6.53)类型的方程可以采用一个特殊的计算方法——柯威耳方法。

为简化推导，我们只讨论一个标量方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(t, x)$$

引入算子 $D=\frac{d}{dt}$，上面的方程可以写作：

$$D^2x=f(t, x) \tag{6.54}$$

下面介绍用算子方法推导一般的柯威耳公式。除前面已经定义的 D、Δ、∇、δ 等算子外，再引入一个移位算子。

定义 $Ex_n=x_{n+1}$，

称 E 为向后移位算子，则 E^{-1} 称为向前移位算子，这是因为 $E^{-1}x_{n+1}=x_n$。

根据(6.33)式

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n+hDx_n+\frac{1}{2}h^2D^2x_n+\cdots+\frac{1}{m!}h^mD^mx_n\\&=x_n+(e^{hD}-1)x_n,\end{aligned} \tag{6.55}$$

即
$$x_{n+1}-x_n=(e^{hD}-1)x_n,$$

所以 $$\Delta = e^{hD} - 1,\tag{6.56}$$

或 $$e^{hD} = \Delta + 1.\tag{6.57}$$

(6.55) 还表明 E 与 hD 的关系是:

$$E = e^{hD}.\tag{6.58}$$

由于 $$x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - E^{-1}x_{n+1},$$

所以 $$\nabla = 1 - E^{-1},\tag{6.59}$$

或 $$E = (1-\nabla)^{-1}.\tag{6.60}$$

由 (6.58) 和 (6.60) 得:

$$hD = \ln E = -\ln(1-\nabla).\tag{6.61}$$

即 $$hD = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots\frac{1}{n}\nabla^n + \cdots$$

$$= \nabla\left(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \cdots\frac{1}{n}\nabla^{n-1} + \cdots\right).\tag{6.62}$$

$$\begin{aligned}x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} &= (1 - 2E^{-1} + E^{-2})x_{n+1}\\ &= (1-E^{-1})^2 x_{n+1}\\ &= (1-E^{-1})^2(h^2D^2)^{-1}h^2D^2x_{n+1},\end{aligned}$$

将方程 (6.54) 代入上式右端

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = (1-E^{-1})^2(h^2D^2)^{-1}h^2f_{n+1},$$

将(6.59)式和(6.61)式代入上式得:

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \nabla^2[-\ln(1-\nabla)]^{-2}h^2f_{n+1}.\tag{6.63}$$

由 (6.62) 不难得:

$$\nabla^2[-\ln(1-\nabla)]^{-2} = \left(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \cdots + \frac{1}{n}\nabla^{n-1} + \cdots\right)^{-2},$$

也可设 $$\nabla^2[-\ln(1-\nabla)]^{-2} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\nabla^i,\tag{6.64}$$

C_i 为展开式中 ∇^i 项的系数。

又 $$\frac{d[-\ln(1-\nabla)]^2}{d\nabla} = -2\ln(1-\nabla)\frac{1}{1-\nabla}$$

$$=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\nabla^m\sum_{l=0}^{\infty}\nabla^l,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}[-\ln(1-\nabla)]^2}{\mathrm{d}\nabla}=2\Big[\nabla+\nabla^2\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\nabla^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\nabla^4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots\Big]$$
$$=2\sum_{l=1}^{\infty}\nabla^l\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{m}.$$

将上式积分,并两端除以 ∇^2 得:

$$\nabla^{-2}[-\ln(1-\nabla)]^2=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2}{l+1}\nabla^{l-1}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{m},$$

令 $j=l-1$, 则:

$$\nabla^{-2}[-\ln(1-\nabla)]^2=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{j+2}\nabla^j\sum_{m=1}^{j+1}\frac{1}{m}$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\nabla^j. \tag{6.65}$$

由(6.65)式中的

$$B_j=\frac{2}{j+2}\sum_{m=1}^{j+1}\frac{1}{m} \tag{6.66}$$

得:

$$B_0=1,\quad B_1=1,\quad B_2=\frac{11}{12},\cdots\cdots,$$

从(6.66)式可得到任何一个 B_j。

将(6.64)式和(6.65)式相乘后有:

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_l\nabla^l\sum_{j=0}^{\infty}B_j\nabla^j=1. \tag{6.67}$$

即 $(C_0+C_1\nabla+C_2\nabla^2+\cdots)(B_0+B_1\nabla+B_2\nabla^2+\cdots)=1,$

比较上式两端 ∇ 的同次幂系数得:

$$B_0C_0 = 1, \qquad \therefore \quad C_0 = 1,$$

$$B_0C_1 + C_0B_1 = 0, \quad \therefore \quad C_1 = -C_0B_1 = -1,$$

$$B_0C_2 + B_1C_1 + B_2C_0 = 0,$$

$$\therefore \quad C = -(B_1C_1 + B_2C_0) = \frac{1}{12}\cdots,$$

$$\vdots$$

对任意的
$$C_i = -\sum_{i=0}^{i-1} C_jB_{i-j}. \tag{6.68}$$

所以(6.64)式中 ∇^i 的系数 C_i 可以通过(6.68) 式确定，将(6.64)式代入(6.63)式，i 取和时由 0 至 $P-1$，

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2\sum_{i=0}^{P-1} C_i\nabla^i f_{n+1}. \tag{6.69}$$

(6.69) 式说明 $\nabla^P f_{n+1} = 0$，所以称作 P 阶的柯威耳公式、需要有 P 个初值内插，(6.69) 是用差分表示的内插公式也称校正公式，利用(6.7)式

$$\nabla^i f_{n+1} = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}f_{n+1-j},$$

将它代入(6.69)式

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\sum_{i=0}^{P-1} C_if_{n+1-j}$$

$$= h^2(-1)^0\binom{0}{0}C_0f_{n+1} + h^2\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{1}{j}C_1f_{n+1-j}$$

$$+ h^2\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}C_2f_{n+1-j} + \cdots h^2$$

$$\times \sum_{j=0}^{P-1}(-1)^jC_{P-1}f_{n+1-j}.$$

上式右端经适当整理后有：

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2\sum_{j=0}^{P-1}(-1)^j\sum_{i=j}^{P-1}C_i\binom{i}{j}f_{n+1-j}. \tag{6.70}$$

再令
$$\alpha_j = (-1)^j \sum_{i=j}^{p-1} C_i \binom{i}{j}, \tag{6.71}$$

则
$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j f_{n+1-j}. \tag{6.72}$$

(6.72) 式是用函数表示的 P 阶柯威耳校正公式。

用类似的步骤可以推导柯威耳预报公式(外推公式)。

因为

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} &= (E - 2 + E^{-1})x_n \\ &= E(1 - 2E^{-1} + E^{-2})x_n \\ &= E(1 - E^{-1})^2 x_n. \end{aligned}$$

由(6.59)式和(6.61)式得:

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = E\nabla^2 x_n = h^2 E\nabla^2[-\ln(1-\nabla)]^{-2} f_n.$$

而 $$E\nabla^2[-\ln(1-\nabla)]^{-2} = (1-\nabla)^{-1}\nabla^2[-\ln(1-\nabla)]^2$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} S_i \nabla^i. \tag{6.73}$$

S_i 为上式右端展开式 ∇^i 的系数，它们可以用下面方法确定，将(6.73)式左端的 $\nabla^2[-\ln(1-\nabla)]^2$ 用(6.64)式代入，则:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} S_i \nabla^i &= (1-\nabla)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} C_i \nabla^i \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \nabla^l \sum_{j=0}^{\infty} C_j \nabla^j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} C_i \nabla^i + \sum_{i=0}^{\infty} C_i \nabla^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} C_i \nabla^{i+2} \\ &\quad + \cdots + \sum_{i=0}^{\infty} C_i \nabla^{i+l} + \cdots. \end{aligned} \tag{6.74}$$

比较上式两端 ∇ 的同次幂系数，则有:

$$\left.\begin{aligned}
&S_0 = C_0\\
&S_1 = C_1 + C_0 = C_1 + S_0\\
&S_2 = C_2 + C_1 + C_0 = C_2 + S_1\\
&\vdots\\
&S_i = C_i + S_{i-1}
\end{aligned}\right\}. \tag{6.75}$$

当 i 取到 $P-1$ 时有：

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2 \sum_{i=0}^{P-1} S_i \nabla^i f_n. \tag{6.76}$$

(6.76) 便是柯威耳方法的 P 阶预报公式(外推公式)。同样，若用函数表示差分，则(6.76)成为

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{P-1} \alpha_j^* f_{n-j}, \tag{6.77}$$

其中
$$\alpha_j^* = (-1)^j \sum_{i=j}^{P-1} S_i \binom{i}{j}. \tag{6.78}$$

由 (6.66)、(6.68) 和 (6.75) 可以将前几项的 C_i 和 S_i 列表如下：

表 6-2

i	0	1	2	3	4	5	6
B_i	1	1	$\frac{11}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{137}{180}$	$\frac{147}{210}$	$\frac{1089}{1680}$
C_i	1	-1	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{221}{60480}$
S_i	1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{240}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{863}{12096}$

于是我们可以得到 6 阶的柯威耳预报公式和校正公式：

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \frac{h^2}{240}\,(&317 f_n - 266 f_{n-1} + 374 f_{n-2}\\
&- 276 f_{n-3} + 109 f_{n-4} - 18 f_{n-5}),
\end{aligned} \tag{6.79}$$

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \frac{h}{240}\,(18 f_{n+1} + 209 f_n + 4 f_{n-1}$$

$$+ 14f_{n-2} - 6f_{n-3} + f_{n-4}). \tag{6.80}$$

本节介绍的方法传统上称为第一柯威耳方法，第二柯威耳方法是用和分表示的,在此不再作介绍。

§6　恩克方法和梯勒变换

当天体的运动方程的右函数 $f(t, x)$ 趋向很大时，给数值解造成一定困难,这时由于天体的坐标变化很快,必须减小步长来提高精度。但是如果运动方程出现奇点,通常是两个(或多个)天体无限接近时出现的,这种奇点称为碰撞奇点，在这种情况下，仅用减小步长也无助于问题的解决，需要通过适当的坐标变换来消除奇点,这样的变换称为正规化变换。正规化变换有很多种,下面介绍的恩克方法并不是一种可以完全消除奇点的方法，它仅仅能减小当两个天体的距离无限接近时对解方程的影响。梯勒方法是传统的，消除平面圆型限制性三体问题小天体与主星体碰撞奇点的较好的方法。

1. 恩克 (Encke) 方法

以直角坐标为变量的天体运动方程的形式是:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{6.81}$$

当运动天体与主星体非常接近时,上式右端函数变得很大,天体的运动速度很快,恩克提出一种方法,不直接计算天体的坐标$\boldsymbol{r}$,而是计算坐标的摄动量。

设 $\boldsymbol{r}_0$ 表示天体无摄动时的坐标，$\boldsymbol{\rho}$ 为坐标的摄动量，即 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$，因为由于摄动体的存在才产生 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 的差别故 $\boldsymbol{\rho}$ 的大小应与 m' (摄动体质量)同数量级。

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{r}_0}{dt^2} = \mu\left(\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) + \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{6.82}$$

$$\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}}{r_0^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}\left[\boldsymbol{r}\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) - \boldsymbol{\rho}\right], \tag{6.83}$$

又

$$
\begin{aligned}
r^2 = \boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\rho})^2 = \rho^2 + r_0^2 + 2\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r}_0 \\
= r_0^2 + 2\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right).
\end{aligned}
$$

故

$$
\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = 1 + \frac{2}{r_0^2}\left[\boldsymbol{\rho}\cdot\left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right)\right] = 1 + 2q. \tag{6.84}
$$

上式中

$$
q = \frac{1}{r_0^2}\left[\boldsymbol{\rho}\cdot\left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\right)\right],
$$

显然 q 也是一个与 m' 同量级的小量。由(6.84)可得：

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 &= (1+2q)^{-\frac{3}{2}} \\
&= 1 - 3q + \frac{3\cdot 5}{2!}q^2 - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{3!}q^3 + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{2}}{i}(2q)^i = 1 - fq,
\end{aligned} \tag{6.85}
$$

上式中

$$
f = 3 - \frac{3\cdot 5}{2!}q + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{3!}q^2 - \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4!}q^3 + \cdots\cdots,
$$

将(6.85)式代入(6.83)式

$$
\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}(fq\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}).
$$

将上式代入(6.82)后有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mu}{r_0^3}[fq(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}] + \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}} \\
&= \frac{\mu}{r_0^3}[fq(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}] \\
&\quad + Gm'\left[\frac{1}{\Delta^3}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) - \frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right].
\end{aligned} \tag{6.85}
$$

(6.85)式为恩克方法的基本公式,由于(6.85)式的右端含有 m' 的因子,因此当 r_0、r' 和 Δ 等趋向很小时,ρ 的变化不会很大,但是这并没有完全消除碰撞奇点。恩克曾经在彗星很接近太阳时用这一方法计算彗星的坐标。

2. 梯勒 (Thiele) 变换

一个平面圆型限制性三体问题,在固定坐标系 $o\text{-}\xi\eta$ 中,系统的总动能

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}(1-\mu)v_1^2 + \frac{1}{2}\mu v_2^2,$$

上式中 v_1 和 v_2 分别为两个主星体的线速度,因而在无量纲系统中 $v_1 = \mu$, $v_2 = 1-\mu$, 故上式成为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \mu(1-\mu). \tag{6.86}$$

系统的力函数

$$U = \mu(1-\mu) + \frac{m(1-\mu)}{r_1} + \frac{m\mu}{r_2}$$

$$= \mu(1-\mu) + mV, \tag{6.87}$$

其中

$$V = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \tag{6.88}$$

如同第三章中所阐明的那样,可以通过坐标变换,用在旋转坐标系中的坐标 (x, y) 表示系统的动能 T,这时

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

$$+ \frac{1}{2} m(x^2 + y^2) + \mu(1-\mu). \tag{6.89}$$

拉格朗日函数 $L = T + V$, 通过拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

取广义坐标 $q_1 = x$, $q_2 = y$, 则有:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{y}-x&=\frac{\partial V}{\partial x}\\ \ddot{y}+2\dot{x}-y&=\frac{\partial V}{\partial y}\end{aligned}\right\}。$$

或

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{y}&=\frac{\partial \Omega}{\partial x}\\ \ddot{y}+2\dot{x}&=\frac{\partial \Omega}{\partial y}\end{aligned}\right\}。\tag{6.90}$$

其中

$$\Omega=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}。\tag{6.91}$$

运动方程(6.90)存在雅可比积分:

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}+\frac{C}{2}$$

上式表明

$$T_2=T_0+V+h,\tag{6.92}$$

其中

$$T_2=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right),$$

$$T_0=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right),$$

h 为积分常数$\left(h=\frac{C}{2}\right)$。

当小天体与主星体的距离 r_1(或 r_2) 无限接近时，$\Omega\rightarrow\infty$，因而运动方程 (6.90) 出现奇点。引入下面的坐标和时间的变换，可以消除奇点。

(u, v) 表示新坐标，τ 表示新的时间变量它们与 (x, y) 和 t 有以下关系:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}-\mu+\frac{1}{2}\cos u\operatorname{ch} v\\ y&=-\frac{1}{2}\sin u\operatorname{sh} v\\ dt&=J d\tau\end{aligned}\right\}。\tag{6.93}$$

其中 J 为雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},\tag{6.94}$$

显然

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix}.\tag{6.95}$$

而由(6.93)式得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{2}\sin u\,\mathrm{ch}\,v\\ &\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2}\cos u\,\mathrm{sh}\,v\end{aligned}\right\},\tag{6.96}$$

故

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{8}(\mathrm{ch}\,2v-\cos 2u).\tag{6.97}$$

用 (u,v) 和 $(\dot{u},\dot{v})$ 表示(6.89)式的 T，则(6.89)右端前三项为

$$\left.\begin{aligned}T_2&=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}J(\dot{u}^2+\dot{v}^2)\\ T_1&=x\dot{y}-y\dot{x}=\dot{u}\left(x\frac{\partial y}{\partial u}-y\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\ &\quad+\dot{v}\left(x\frac{\partial y}{\partial v}-y\frac{\partial x}{\partial v}\right)\\ T_0&=\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\cos u\,\mathrm{ch}v+\frac{1}{16}(\mathrm{ch}\,2v+\cos 2u)\end{aligned}\right\},\tag{6.98}$$

于是拉格朗日函数 $L=T+V$ 可视作 u、v、$\dot{u}$、$\dot{v}$ 的函数，将 u、v 作为广义坐标，因为 T_0不包含 $\dot{u}$，和 $\dot{v}$ 所以新坐标表示的拉

格朗日方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(T_2+T_1)}{\partial\dot{u}}\right)-\frac{\partial(T_2+T_1+T_0+V)}{\partial u}=0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(T_2+T_1)}{\partial\dot{v}}\right)-\frac{\partial(T_2+T_1+T_0+V)}{\partial v}=0\end{aligned}\right\}。$$

即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_2}{\partial\dot{u}}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\dot{u}}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial u}\\ =\frac{\partial T_2}{\partial u}+\frac{\partial T_0}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial u}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_2}{\partial\dot{v}}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\dot{v}}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial v}\\ =\frac{\partial T_2}{\partial v}+\frac{\partial T_0}{\partial v}+\frac{\partial V}{\partial v}\end{aligned}\right\}。\tag{6.99}$$

(6.98)式中的 T_2、T_1 代入上式，可得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_2}{\partial\dot{u}}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\dot{u}}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial u}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\dot{u})-2\dot{v}J\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_2}{\partial\dot{v}}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\dot{v}}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\dot{v})+2\dot{u}J\end{aligned}\right\},\tag{6.100}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T_2}{\partial u}+\frac{\partial T_0}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial u}(JT_2)\\ \frac{\partial T_2}{\partial v}+\frac{\partial T_0}{\partial v}+\frac{\partial V}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial v}(JT_2)\end{aligned}\right\}。\tag{6.101}$$

又因 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$，所以将(6.100)和(6.101)代入(6.99)得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\tau^2}-2J\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial\Omega^*}{\partial u}\\ \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\tau^2}+2J\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial\Omega^*}{\partial v}\end{aligned}\right\}。\tag{6.102}$$

其中 $$\Omega^*=JT_2-J(T_0+V+h)。\tag{6.103}$$

(6.102)式是经过梯勒交换后的平面圆型限制性三体问题的

运动方程，此方程不再存在碰撞奇点。这是因为当 r_1（或 r_2）$\to 0$ 时 Ω^* 不再趋向无穷大。

$$
\begin{aligned}
r_1^2 &= (x - x_1)^2 + y^2 = (x + \mu)^2 + y^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 + \cos u \operatorname{ch} v)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 u \operatorname{sh}^2 v \\
&= \frac{1}{4}(\cos u + \operatorname{sh} v)^2, \\
r_2^2 &= (x - x_2)^2 + y^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 \\
&= \frac{1}{4}(\cos u \operatorname{ch} v - 1)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 u \operatorname{sh}^2 v \\
&= \frac{1}{4}(\operatorname{ch} v - \cos u)^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\left.
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} v + \cos u) \\
r_2 &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} v - \cos u)
\end{aligned}
\right\}, \tag{6.104}
$$

$$
V = \frac{2(1-\mu)}{\operatorname{ch} v + \cos u} + \frac{2\mu}{\operatorname{ch} v - \cos u}, \tag{6.105}
$$

上式连同(6.97)式和(6.98)式代入(6.103)得：

$$
\begin{aligned}
\Omega^* = {} & \frac{1}{8}(\operatorname{ch} 2v - \cos 2u)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 + h\right] \\
& + \frac{1}{2}(1 - \mu)(\operatorname{ch} v - \cos u) \\
& + \frac{1}{2}\mu(\operatorname{ch} v + \cos u) \\
& + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)(\operatorname{ch} 3v \cos u - \operatorname{ch} v \cos 3u) \\
& + \frac{1}{256}(\operatorname{ch} 4v - \cos 4u).
\end{aligned}
$$

可见当 $r_1 \to 0$，$r_2 \to 0$ 时 Ω^* 不再趋向无穷大，运动方程不再存在奇点。

§7 收敛性和稳定性

收敛性和稳定性是判断一个微分方程的数值解法能否被采用的依据，它们的严格讨论涉及到一种方法的误差以及误差的传递和累积方式等许多数学细节问题，读者若有兴趣可参看有关参考书. 在这一节中我们仅对收敛性和稳定性的概念和定义作一介绍。

1. 收敛性

一个数值方法的收敛性是表达了用充分小的步长和精确的计算使所得到的数值解可以任意接近精确解(理论解)的性质. 也就是说，如果想在区域 $a \leqslant t \leqslant b$ 中，求固定点 t 上一微分方程的解，我们可以选择充分大的 N，使得当步长 $h_N = \frac{t-a}{N} \to 0$ 时，在满足初始条件之下按我们的要求计算得到的在 t 上的一系列近似解，$x_n(h_1)$、$x_n(h_2)$、$\cdots x_n(h_N)$ 一致收敛于微分方程的精确解 $x(t_n)$，那么我们称这一方法是收敛的，否则就是不收敛的。

从以上关于收敛性的定义也可以看出只要一个 P 阶的计算公式的截断误差 $R(h)$ 满足:

$$|R(h)| \leqslant Dh^{P+1},$$

D 为一正的有限数，h 为步长，那么这一方法是收敛的。

2. 稳定性

在本章第二节中我们曾经指出，任何一种数值方法都存在截断误差，此外，由于在具体计算过程中，只能取有限位小数，必然会产生舍入误差. 这两种误差不仅存在于每一个步点的计算中，而且还会传递到下一个步点中去. 在逐次计算中，误差有可能不断累积. 是否计算到若干步以后，其计算结果完全被误差所淹没呢? 如果真是这样，就完全失去数值解的价值. 所谓一个数值方法的稳定性问题是指在这一方法中误差是否能被控制的问题. 从台劳级数解的截断误差 (6.35) 看出对于一个 P 阶的单步或多步法，每

一步的截断误差的量级为 $O(h^{r+1})$，因此稳定性与步长 h 有关.

对于一个满足莱普希茨 (Lipschitz) 条件的微分方程，如果存在正数 h_0 和 K，当取步长 h，$0<h\leqslant h_0$，在某一节点 x_n 处，若有一误差(或扰动) δ 使

$$|x_n-\bar{x}_n|=\delta$$

而在以后的各步点 $x_m(m>n)$ 处的误差 $|x_m-\bar{x}_m|$ 始终保持:

$$|x_m-\bar{x}_m|\leqslant K\delta$$

那么就说这一数值方法是稳定的. 区域 $0<h\leqslant h_0$ 称为稳定域. 这种稳定称为绝对稳定，如果只有当 $h\to 0$ 时才稳定，那么称为零稳定或渐近稳定.

事实上，采用一种数值方法解决一个实际问题时，要从理论上解决稳定性的分析是很困难的. 在实践中往往用某一步长进行试算，如果遇到不稳定的情况，就变换一个步长再作试算，经多次试算后还不成功，只好另换方法.

第七章　人造地球卫星轨道理论

经典天体力学主要研究太阳系内各种自然天体，例如行星、小行星、彗星和天然卫星（包括月球）等的运动。

在研究行星、小行星和彗星等天体运动时，由于这些天体以及太阳的大小与它们相互之间的距离相比是十分微小的，因此可以把它们都视为质点，这样这些天体的运动基本上属于若干个质点在相互引力作用下的运动问题，我们在第四章和第五章中已经作了介绍。

在研究月球和某些天然卫星运动时，由于这些天体离开主行星的距离比较近，例如地月距离约是地球半径的 60 倍，木卫 I（Io）与木星距离仅是木星半径的 6 倍，这时不能把行星对卫星的引力当作质点引力，需要适当考虑行星的形状和内部结构。

自从 1957 年 10 月 4 日人类历史上出现第一颗人造地球卫星以来，全世界各国总共成功地发射了二千多次人造卫星，研究人造地球卫星的运动成为现代天体力学的一个重要分支。在研究人造地球卫星运动时，由于绝大多数卫星离开地球的距离都很近，通常只是地球半径的 0.03 到 0.3 倍，因此必须考虑地球形状的不规则性及其内部精细结构。地球附近还有浓密的大气层，人造卫星在大气层中运动，明显受到大气的阻力。另外，对于一些体积比较大而质量又比较小的卫星，太阳的光压作用也十分显著。这样使人造卫星运动具有一些特殊的规律，相应地也出现了一些与经典方法完全不同的新方法来研究人造卫星的运动。本章介绍人造地球卫星在各种摄动作用下的运动情况。

§1 人造卫星在地球引力场中的运动

将(1.50)式代入(1.4)式后可得人造卫星在地球引力场中的运动方程是:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}=\nabla R, \tag{7.1}$$

其中摄动函数

$$R=-\frac{GM}{r}\Big[\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{a_e}{r}\Big)^n J_n P_n(\sin\varphi)\Big]$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_e}{r}\Big)^n P_n^k(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\lambda$$
$$+S_{nk}\sin k\lambda)。 \tag{7.2}$$

(7.1)式是三个二阶微分方程组,积分后就得到人造卫星在地球引力场中的运动情况。我们可以认为(7.1)式相对应的"齐次方程"是:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}=0, \tag{7.3}$$

(7.3)式就是一般的二体问题,在第二章已经得到了它的完全解为

$$\boldsymbol{r}=a(\cos E-e)\boldsymbol{P}+a\sqrt{1-e^2}\sin E\boldsymbol{Q}, \tag{7.4}$$

其中 $E-e\sin E=M$，$\boldsymbol{P}$ 是轨道近地点方向，$\boldsymbol{Q}$ 是轨道面上 f 等于 $\frac{\pi}{2}$ 处，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 是卫星的轨道根数 Ω、ω 和 i 的函数。

根据(7.4)式,我们可以采用常数变易法来求解(7.1)式。这时微分方程(7.1)的解的形式仍为(7.4)式,只是它的积分常数或者轨道根数不再是一组常数而是随时间变化着。在第五章中，我们得到了轨道根数应当满足的摄动运动方程，这就是拉格朗日运动方程(5.67)式。通过求解拉格朗日运动方程就可以得到人造卫星在地球引力场中的运动情况。

(7.2)式的右端第一部分包含带谐系数 J_n。由表 1-1 可以看出

$J_2 \sim 10^{-3}$，作为一阶小量．含 J_2 的项称为一阶摄动，它是地球形状摄动中的主要项．这项相应卫星的距离偏差 ～10 公里，速度偏差 ～10 米/秒．$J_2^2 \sim J_3$、$J_4 \sim 10^{-6}$，作为二阶小量．含它们的项称为二阶摄动，这些项相应卫星的距离偏差～10 米，速度偏差 ～1 厘米/秒．J_2^3、J_2J_3 和 J_2J_4 等属于三阶小量，含它们的项称为三阶摄动，这些项相应卫星的距离偏差～1 厘米，速度偏差～10^{-3}厘米/秒．

(7.2) 式的右端第二部分包含田谐系数 C_{nk} 和 S_{nk}．由表 1-3 可以看出归一化的田谐系数约是 10^{-6}—10^{-7}，有些更小．我们可以把它们当作为二阶小量．这些项包含有卫星的地理经度 λ，它们与地球的自转有关，以后再作讨论．

在采用地球引力场位函数第一种简化模型时，(7.2) 式成为

$$R = -\frac{GM}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\varphi), \qquad (7.5)$$

其中 $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$，$\sin\varphi = \sin i\sin(\omega + f)$．

将(7.5)式代入拉格朗日方程(5.67)式时，方程右端可以表示为卫星轨道根数 a、e、$\sin i$ 的幂级数和 ω、M 的三角级数．含M 的项是周期项，它的周期很短，相当于卫星的运动周期即几十分钟或几小时，通常称为短周期项．含 ω 的项也是周期项，以后我们可以看到 ω 有缓慢的长期变化即 $\dfrac{d\omega}{dt} \sim J_2$，它相应的周期是 $\dfrac{2\pi}{J_2}$ 相当几十天或一年左右，通常称为长周期项．其余的项仅含 a、e 和 i，以后可以看到它们没有长期变化，这些项称为常数项．将它们对时间积分结果，可以得到轨道根数变化有三种类型：短周期、长周期和长期变化．如果分别把它们记为 σ_s、σ_l 和 $\bar{\sigma}$ 的话，则轨道根数的变化如图 7-1 所示．

由于人造卫星运动较快，在不太长的时间内，一阶长期变化的影响可能会上升到零阶，二阶长期变化的影响可能会上升到一阶，因此在 1959 年古在由秀将非线性振动中平均法的思想应用到人

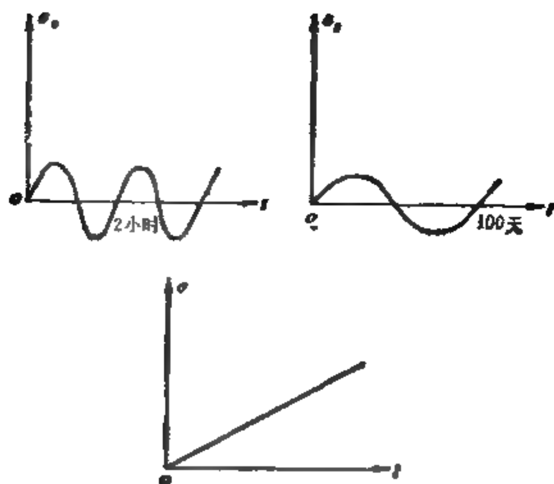


图 7-1

造卫星运动中。他提出了一种平均根数:

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}(t_0) + \sigma_1(t - t_0) + \sigma_2(t - t_0) + \cdots. \quad (7.6)$$

其中

$$\bar{\sigma}(t_0) = \sigma(t_0) - [\sigma_s^{(1)}(t_0) + \sigma_s^{(2)}(t_0) + \cdots] - [\sigma_l^{(1)}(t_0) + \sigma_l^{(2)}(t_0) + \cdots], \quad (7.7)$$

这里 $\sigma_s^{(1)}$ 和 $\sigma_s^{(2)}$ 分别表示一阶和二阶短周期项; $\sigma_l^{(1)}$ 和 $\sigma_l^{(2)}$ 分别表示一阶和二阶长周期项; σ_1 和 σ_2 分别为一阶和二阶长期项的系数. 这时对于任何时刻 t 时卫星的瞬时根数就是:

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma_s^{(1)}(t) + \sigma_s^{(2)}(t) + \cdots + \sigma_l^{(1)}(t) + \sigma_l^{(2)}(t) + \cdots \quad (7.8)$$

由(7.6)、(7.7)和(7.8)式可以看出所谓平均根数实质上就是从瞬时根数中除去了所有周期变化,起了一个"平均"作用. 利用平均根数所得到的轨道实际上可以认为是一种中间轨道. 由后面所得到的结果可以看到卫星的轨道根数中 Ω、ω 和 M 有长期变化, 而 a、e 和 i 没有长期变化,因此实际上它仍然是一个椭圆,这个椭圆的大小,形状和轨道倾角保持不变, 只是轨道的升交点、近地点以及过近地点的时刻有长期变化。这样的中间轨道比二体问题中

的椭圆轨道更要接近卫星的真实轨道.在人造卫星运动理论中,讨论卫星轨道根数的一阶周期变化和二阶长期变化称为一阶理论。卫星的一阶理论通常可使卫星的距离精度控制在公里量级内，速度精度控制在米/秒量级内。同样包含卫星轨道根数的二阶周期变化和三阶长期变化的称为二阶理论。它相应的距离精度控制在米量级内,速度精度控制在0.1厘米/秒量级内。

如果我们已经求出了σ_1、σ_2、σ_s和σ_l的表达式,则可以利用卫星在某初始时刻t_0时的轨道根数$\sigma(t_0)$从(7.6)、(7.7)和(7.8)式外推出所需时刻t时的轨道根数$\sigma(t)$,然后进行卫星的位置预报.因此我们首先要求出σ_1、σ_2、σ_s和σ_l的表达式。

将(7.5)式代入(5.67)式后,拉格朗日方程形式上可以写为

$$\frac{d\sigma}{dt}=F_0(n)+F_1(J_2,\sigma)+F_2(K,\sigma). \tag{7.9}$$

其中K表示J_3、J_4等高阶带谐系数,它相当于二阶小量.(7.9)式中的

$$F_0=\begin{cases}0 & \text{对于根数 } a、e、i、\omega \text{ 和 } \Omega, \\ n & \text{对于根数 } M,\end{cases}$$

这里的$n=\sqrt{\dfrac{GM}{a^3}}$。

将(7.9)式右端的瞬时根数σ在平均根数$\bar{\sigma}$处作台劳展开,由(7.8)式可得:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt}=&F_0(\bar{n})+\left(\frac{\partial F_0}{\partial a}\right)_{\bar{a}}(a_s+a_l)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a^2}\right)_{\bar{a}}(a_s^2+a_l^2\\&+2a_sa_l)+F_1(J_2,\bar{\sigma})+\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_j}\right)_{\bar{\sigma}}(\sigma_s+\sigma_l)\\&+F_2(K,\bar{\sigma})+O(J_2^3).\end{aligned} \tag{7.10}$$

这里σ_s应包括一阶短周期项$\sigma_s^{(1)}$和二阶短周期项$\sigma_s^{(2)}$;σ_l也同样包括$\sigma_l^{(1)}$和$\sigma_l^{(2)}$.由后面我们可以看到$a_l^{(1)}=0$。另外在讨论卫星的一阶理论时可以忽略它的二阶周期项,于是(7.10)式变为

$$\frac{d\sigma}{dt}=F_0(\bar{n})+\left(\frac{\partial F_0}{\partial a}\right)_{\bar{a}}(a_s+a_l^{(2)})+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a^2}\right)_{\bar{a}}a_s+F_1(J_2,\bar{\sigma})$$

$$+\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_i}\right)_{\bar{a}}(\sigma_s+\sigma_l)+F_2(K,\bar{\sigma})+O(J_2^3), \quad (7.11)$$

式中 σ_s 仅是 $\sigma_s^{(2)}$，σ_l 仅是 $\sigma_l^{(1)}$。

由(7.6)、(7.7) 和(7.8)式有：

$$\sigma(t)-\sigma(t_0)=\sigma_1(t-t_0)+\sigma_2(t-t_0)+\sigma_s(t)$$
$$-\sigma_s(t_0)+\sigma_l(t)-\sigma_l(t_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t, \quad (7.12)$$

将(7.11)式代入(7.12)式并且比较 J_2 和 J_2^2（与 K 相当）前系数分别可得：

$$\sigma_1(t-t_0)+\sigma_s(t)-\sigma_s(t_0)=\int_{t_0}^{t}\left[F_0(\bar{a})+\left(\frac{\partial F_0}{\partial a}\right)_{\bar{a}}a_s\right.$$
$$\left.+F_1(J_2,\bar{\sigma})\right]\mathrm{d}t, \quad (7.13)$$

和

$$\sigma_2(t-t_0)+\sigma_l(t)-\sigma_l(t_0)=\int_{t_0}^{t}\left[\left(\frac{\partial F_0}{\partial a}\right)_{\bar{a}}a_s^{(2)}\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a^2}\right)_{\bar{a}}a_s^2+\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_i}\right)_{\bar{a}}(\sigma_s+\sigma_l)$$
$$\left.+F_2(K,\bar{\sigma})\right]\mathrm{d}t, \quad (7.14)$$

(7.13) 式右端积分号内的常数项对时间 t 积分的结果是一阶长期项 σ_1；短周期项对时间 t 积分的结果就是一阶短周期项 σ_s。(7.14) 式右端积分号内的常数项对时间 t 积分的结果是二阶长期项 σ_2；短周期项对时间 t 积分的结果是二阶短周期项可以忽略；长周期项对时间 t 积分通过积分变量变换 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\omega\Big/\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 化为对 ω 积分，在求积过程中由于 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\sim J_2$ 而降一阶，积分结果得到一阶长周期项 σ_l。因此在讨论人造卫星运动的一阶理论时，最后就归结为求出积分 (7.13)和(7.14) 式。

由(7.5) 式知道，摄动函数 R 不显含时间 t 和轨道根数 Ω，这

样方程就存在有二个积分。

由(5.67)式有

$$\frac{dR}{dt}=\frac{\partial R}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial R}{\partial e}\frac{de}{dt}+\frac{\partial R}{\partial i}\frac{di}{dt}+\frac{\partial R}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dt}$$

$$+\frac{\partial R}{\partial \Omega}\frac{d\Omega}{dt}+\frac{\partial R}{\partial M}\frac{dM}{dt}=n\frac{\partial R}{\partial M}=\frac{GM}{2a^2}\frac{da}{dt}$$

$$=-\frac{d}{dt}\left(\frac{GM}{2a}\right).$$

对时间 t 积分结果是:

$$\frac{GM}{2a}+R=\text{const.} \tag{7.15}$$

(7.15)式就是能量积分,它表示在地球引力场中卫星的总机械能是守恒的。

由于 $\frac{\partial R}{\partial \Omega}=0$,从(5.67)式还有:

$$\frac{e}{1-e^2}\frac{de}{dt}=\frac{1}{2a}\frac{da}{dt}-\operatorname{tg} i\frac{di}{dt} \tag{7.16}$$

对时间 t 积分结果是:

$$\sqrt{a(1-e^2)}\cos i=\text{const.}$$

(7.16)式就是面积积分,它表示卫星的动量矩在 z 轴上是守恒的。

另外,由(5.67)式还有:

$$\frac{d\omega}{dt}=-\cos i\frac{d\Omega}{dt}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}. \tag{7.17}$$

(7.15)、(7.16)和(7.17)式对于求各轨道根数的摄动是十分有用的,利用它们可以根据已知根数的摄动求出其它一些根数的摄动。

为了便于公式推算,我们常常采用理论单位制。在人造地球卫星轨道理论中,我们取地球赤道平均半径 $a_e=1$,地球质量 $M=1$,选用时间单位是 $\left(\frac{a_e^3}{GM}\right)^{1/2}$,使得 $G=1$。目前国际上采用地球参考椭球体的 a_e 是 6378.160 公里,GM 是 398603 公里^3/

秒²，则相应的时间单位是 806.813 秒或者 13.4469 分钟。

§2 带谐系数中主要项 J_2 所引起的摄动

由上节知道，利用 (7.13) 式可以求出带谐系数中主要项 J_2 所引起的一阶长期项和短周期项。

我们采用理论单位制，并令 $A_2=\frac{3}{2}J_2$，从 (7.5) 式可得 J_2 项所引起的摄动函数：

$$R=-\frac{J_2}{r^3}P_2(\sin\varphi)=\frac{A_2}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\sin^2\varphi\right). \qquad (7.18)$$

由于 $\sin\varphi=\sin i\sin(\omega+f)$，(7.18)式又可化为

$$R=\frac{A_2}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)+\frac{1}{2}\sin^2 i\cos 2(\omega+f)\right]. \qquad (7.19)$$

由于 r 和 f 是轨道根数 a、e 和M的函数，因此(7.19) 式的 R 包含有二项，一项是不含M的常数项，另一项是含M的短周期项，我们分别记为 R_1 和 R_s。利用富里叶级数的正交性，将摄动函数 R 对平近点角M在 0 到 2π 区间内求平均值，结果可以分离出其中的常数项 R_1，其余部分就是短周期项 R_s。

利用二体问题公式：$r^2\frac{df}{dt}=\sqrt{a(1-e^2)}$ 或者 $dM=\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{df}{\sqrt{1-e^2}}$ 和 $\frac{a}{r}=\frac{1+e\cos f}{1-e^2}$，可得：

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 dM=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)df$$
$$=(1-e^2)^{-3/2}. \qquad (7.20)$$

和

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(\omega+f)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(\omega+f)dM$$

$$= \frac{(1-e^2)^{-3/2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos f)\cos 2(\omega+f)\mathrm{d}f = 0。\tag{7.21}$$

利用(7.20)和(7.21)式可得R中的常数项

$$R_1 = \overline{R} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\mathrm{d}M = \frac{A_2}{a^3}(1-e^2)^{-3/2} \times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)。\tag{7.22}$$

由(7.22)式可以看出 R_1 仅是轨道根数 a、e 和 i 的函数，于是有：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial R_1}{\partial \omega} = \frac{\partial R_1}{\partial \Omega} = \frac{\partial R_1}{\partial M} = 0\\
&\frac{\partial R_1}{\partial a} = -\frac{A_2}{a^4}(1-e^2)^{-3/2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\\
&\frac{\partial R_1}{\partial e} = \frac{A_2 e}{a^3}(1-e^2)^{-5/2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\\
&\frac{\partial R_1}{\partial i} = -\frac{A_2}{a^3}(1-e^2)^{-3/2}\sin i\cos i
\end{aligned}\right\}。\tag{7.23}$$

将(7.23)式代入(5.67)式后，利用(7.13)式可得人造卫星轨道根数的一阶长期项的系数是：

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = e_1 = i_1 = 0\\
&\Omega_1 = -\frac{A_2 n}{p^2}\cos i\\
&\omega_1 = \frac{A_2 n}{2p^2}(5\cos^2 i - 1)\\
&M_1 = n\left[1+\frac{A_2\sqrt{1-e^2}}{p^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right]
\end{aligned}\right\}。\tag{7.24}$$

其中 $p = a(1-e^2)$。

从(7.24)式可以看出，卫星根数ω有长期变化，$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\sim A_2 \sim J_2$。

由于 $A_2 = \frac{3}{2}J_2 > 0$，当卫星处于顺行轨道，这时轨道倾角 i 在0

到 $\frac{\pi}{2}$ 之间，由(7.24)式可得 $\Omega_1 < 0$；这表示地球形状摄动会导致卫星的轨道面在西退。当卫星处于逆行轨道，这时 i 在 $\frac{\pi}{2}$ 到 π 之间，相应的 $\Omega_1 > 0$；这表示地球形状摄动会导致卫星轨道面在东进。对于赤道卫星，$i=0$，Ω_1 的数值最大；对于极轨道卫星，$i=\frac{\pi}{2}$，$\Omega_1=0$；这意味着卫星轨道面是固定不动的。当 $i=63°26'$ 时，有 $5\cos^2 i-1=0$，从(7.24)式可以看出这时的 $\omega_1=0$，这个角度称为临界角。

由(7.19)和(7.22)式可得 R 中的短周期项：

$$R_s = R - R_1 = \frac{A_2}{a^3}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 i\cos 2(\omega+f)\right\}, \qquad (7.25)$$

下面利用(7.13)和(7.25)式求出人造卫星轨道根数的一阶短周期项。

对于根数 a，我们直接可以利用能量积分(7.15)式求得。将卫星的瞬时根数 a 在平均根数 $\bar{a}=a-a_s-a_l$ 处展开后有：

$$\frac{1}{2\bar{a}}-\frac{1}{2a^2}(a_s+a_l)+R_1+R_s+O(J_2^2)=\text{const}. \quad (7.26)$$

上式左端第二项用 a 代替 $\bar{a}$，其影响仅是 J_2^2。比较(7.26)式二边的短周期和长周期部分后有：

$$-\frac{1}{2a^2}a_s+R_s=0, \quad -\frac{1}{2a^2}a_l=0,$$

由此可得根数 a 的一阶短周期项和长周期项分别是：

$$a_s=2a^2R_s=\frac{A_2}{a}\left\{\left(\frac{2}{3}-\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right\}. \qquad (7.27)$$

和

$$a_l = 0。 \tag{7.28}$$

下面求根数 i 的一阶短周期项。我们知道 $\frac{r}{a}$ 和 f 仅是根数 e 和 M 的函数，它们与 ω 无关，故由 (7.25) 式有：

$$\frac{\partial R_s}{\partial \omega} = -\frac{A_2}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 i \sin 2(f+\omega), \tag{7.29}$$

另外，$\frac{\partial R_s}{\partial \Omega} = 0$。将它们代入 (5.67) 式后，对 t 的积分变换成对 f 的积分，在积分过程中可将卫星的根数视为常量，它所引起的误差仅是二阶短周期摄动。利用公式

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2(f+\omega)dt = \frac{a^3}{p^{3/2}}\int(1+e\cos f)\sin 2(f+\omega)df$$

$$= -\frac{a^3}{2p^{3/2}}\left[\cos 2(f+\omega) + e\cos(f+2\omega)\right.$$

$$\left. + \frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right],$$

积分结果可得根数 i 的一阶短周期项是：

$$i_s = \frac{A_2 \sin 2i}{4p^2}\left[\cos 2(f+\omega) + e\cos(f+2\omega)\right.$$

$$\left. + \frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\right]. \tag{7.30}$$

对于根数 e，我们可以利用面积积分 (7.16) 式。同样将它们在平均根数处展开有：

$$\sqrt{\bar{a}(1-\bar{e}^2)}\cos\bar{i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{a}}\cos i(a_s + a_l)$$

$$- \frac{e\sqrt{a}}{\sqrt{1-e^2}}\cos i(e_s + e_l)$$

$$- \sqrt{a(1-e^2)}\sin i(i_s + i_l) + O(J_2^2) = \text{const}。 \tag{7.31}$$

比较上式二边的短周期和长周期部分并利用 (7.28)式，则有：

$$e_s = \frac{1-e^2}{e}\left(\frac{1}{2a}a_s - \operatorname{tg} i\; i_s\right) \tag{7.32}$$

和

$$e_s = -\frac{1-e^2}{e}\operatorname{tg} i\, i_s. \tag{7.33}$$

将(7.27)和(7.30)式代入(7.32)式后可得根数 e 的一阶短周期项是:

$$\begin{aligned} e_s = \frac{A_2(1-e^2)}{a^2 e}\Big\{&\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right] \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 i\cos 2(f+\omega)-\frac{\sin^2 i}{2(1-e^2)^2}\Big[\cos 2(f+\omega) \\ &+e\cos(f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{7.34}$$

为了要求根数 Ω、ω 和 M 的一阶短周期项，首先需要求出 $\frac{\partial R_s}{\partial a}$、$\frac{\partial R_s}{\partial i}$ 和 $\frac{\partial R_s}{\partial e}$。

由于 $\frac{a}{r}$ 和 f 仅与 e 和 M 有关而与 a 和 i 无关，因此由(7.25)式很容易求出

$$\frac{\partial R_s}{\partial a} = -\frac{3R_s}{a}. \tag{7.35}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_s}{\partial i} = \frac{A_2\sin 2i}{2a^3}\Big[&(1-e^2)^{-3/2}-\left(\frac{a}{r}\right)^3 \\ &+\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\Big]. \end{aligned} \tag{7.36}$$

为了求 $\frac{\partial R_s}{\partial e}$，必须先要求 $\frac{a}{r}$ 和 f 对 e 的偏微商。由二体问题公式 $E - e\sin E = M$，有:

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1-e\cos E} = \frac{a}{r}\sin E \tag{7.37}$$

利用 $r = a(1-e\cos E)$ 并将(7.37)式代入可得:

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\left(\cos E - e\sin E\frac{\partial E}{\partial e}\right)$$

$$= -a\left(\cos E - \frac{e\sin^2 E}{1 - e\cos E}\right)$$

$$= -a\,\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} = -a\cos f. \tag{7.38}$$

故有

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{a}{r}\right) = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos f \tag{7.39}$$

利用 $r\cos f = a(\cos E - e)$，有

$$\frac{\partial r}{\partial e}\cos f - r\frac{\partial f}{\partial e}\sin f = -a\frac{\partial E}{\partial e}\sin E - a. \tag{7.40}$$

将(7.37)和(7.38)式代入上式后可得：

$$r\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{a^2\sin^2 E}{r\sin f} + a\sin f,$$

或者是

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{1}{1-e^2}\sin f + \frac{a}{r}\sin f = \frac{1}{1-e^2}\sin f(2 + e\cos f). \tag{7.41}$$

利用(7.39)和(7.41)式由(7.25)式可以求出：

$$\frac{\partial R_1}{\partial e} = \frac{A_2}{a^3}\left\{\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f - e(1-e^2)^{-5/2}\right]\right.$$

$$+ \frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos 2(f+\omega)$$

$$\left. - \frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin f(2 + e\cos f)\sin 2(f+\omega)\right\}. \tag{7.42}$$

将(7.36)式代入(5.67)式后对 t 积分并利用下列积分：

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)^3 dt = \frac{a^2}{p^{1/2}}\int\frac{a}{r}\,df = \frac{a^3}{p^{3/2}}\int(1 + e\cos f)\,df$$

$$= \frac{a^3}{p^{3/2}}(f + e\sin f)$$

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\,dt = \frac{a^3}{p^{3/2}}\int(1 + e\cos f)\cos 2(f+\omega)\,df$$

$$= \frac{a^3}{p^{3/2}}\int\left\{\cos 2(f+\omega) + \frac{e}{2}[\cos(3f + 2\omega)\right.$$

$$+\cos(f+2\omega)]\Big\}\,\mathrm{d}f$$

$$=\frac{a^3}{2p^{3/2}}\left[\sin 2(f+\omega)+e\sin(f+2\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\right],$$

可以得到根数Ω的一阶短周期项是:

$$\Omega_s=\frac{A_2\cos i}{p^2}\Big[M-f-e\sin f+\frac{1}{2}\sin 2(f+\omega)$$

$$+\frac{e}{2}\sin(f+2\omega)+\frac{e}{6}\sin(3f+2\omega)\Big], \tag{7.43}$$

由(2.18)式有

$$\omega_s=-\cos i\,\Omega_s+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\int\frac{\partial R_s}{\partial e}\,\mathrm{d}t \tag{7.44}$$

将(7.42)和(7.43)式代入(7.44)式后并利用下列积分:

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\,\mathrm{d}t=\frac{a^4}{p^{5/2}}\int(1+e\cos f)^2\cos f\,\mathrm{d}f$$

$$=\frac{a^4}{p^{5/2}}\Big[\sin f+e\left(f+\frac{1}{2}\sin 2f\right)$$

$$+\frac{e^2}{3}\sin f(2+\cos^2 f)\Big],$$

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos 2(f+\omega)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^4}{p^{5/2}}\int(\cos f+2e\cos^2 f+e^2\cos^3 f)\cos 2(f+\omega)\,\mathrm{d}f$$

$$=\frac{a^4}{2p^{5/2}}\Big[ef\cos 2\omega+\frac{e^2}{4}\sin(f-2\omega)$$

$$+\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\sin(f+2\omega)+e\sin 2(f+\omega)$$

$$+\left(\frac{1}{3}+\frac{e^2}{4}\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{e}{4}\sin(4f+2\omega)$$

$$+\frac{e^2}{20}\sin(5f+2\omega)\Big],$$

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin f(2+e\cos f)\sin 2(f+\omega)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^3}{2p^{3/2}}\int(2+3e\cos f+e^2\cos^2 f)[\cos(f+2\omega)$$

$$-\cos(3f+2\omega)]\,\mathrm{d}f=\frac{a^3}{2p^{3/2}}\left[\frac{3e}{2}f\cos 2\omega+\frac{e^2}{4}\sin(f-2\omega)\right.$$

$$+\left(2+\frac{e^2}{4}\right)\sin(f+2\omega)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{e^2}{12}\right)\sin(3f+2\omega)$$

$$\left.-\frac{3e}{8}\sin(4f+2\omega)-\frac{e^2}{20}\sin(5f+2\omega)\right],$$

或者是

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\int\frac{\partial R_s}{\partial e}\,\mathrm{d}t=-\frac{A_2}{p^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)M$$

$$+\frac{A_2}{p^2e}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\sin f+e\left(f+\frac{1}{2}\sin 2f\right)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{e^2}{3}\sin f(2+\cos^2 f)\right]+\frac{\sin^2 i}{4}\left[\frac{1}{4}e^2\sin(f-2\omega)\right.$$

$$+\left(\frac{7}{4}e^2-1\right)\sin(f+2\omega)+3e\sin(2f+2\omega)$$

$$+\left(\frac{7}{3}+\frac{11}{12}e^2\right)\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{2}e\sin(4f+2\omega)$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}e^2\sin(5f+2\omega)\right]\right\}, \tag{7.45}$$

可得根数 ω 的一阶短周期项是:

$$\omega_s=\frac{A_2}{p^2}\left\{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)(f-M+e\sin f)+\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right.$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{e}{4}\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]$$

$$-\left[\frac{\sin^2 i}{4e}+\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\sin(f+2\omega)-\left(\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin 2(f+\omega)+\left[\frac{7}{12e}\sin^2 i-\left(\frac{1}{6}\right.\right.$$

$$-\frac{19}{48}\sin^2 i\Big)e\Big]\sin(3f+2\omega)+\frac{3\sin^2 i}{8}\sin(4f+2\omega)$$

$$+\frac{e}{16}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\Big\}. \tag{7.46}$$

对于根数 M，根据(7.13)式，其中 $\frac{\partial F_0}{\partial a}=-\frac{3n}{2a}$，可得：

$$M_s=-\frac{3n}{2a}\int a_s\mathrm{d}t-\frac{2}{na}\int\frac{\partial R_s}{\partial a}\mathrm{d}t-\frac{1-e^2}{na^2e}\int\frac{\partial R_s}{\partial e}\mathrm{d}t \tag{7.47}$$

但 $\frac{\partial R_s}{\partial a}=-\frac{3}{a}R_s$，$a_s=2a^2R_s$ 故(7.47)式又可以简化为

$$M_s=\frac{3}{\sqrt{a}}\int R_s\mathrm{d}t-\frac{1-e^2}{na^2e}\int\frac{\partial R_s}{\partial e}\mathrm{d}t \tag{7.48}$$

另外，我们有积分

$$\int R_s\mathrm{d}t=\frac{A_2}{a^3}\Big\{\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\Big)\Big[\int\Big(\frac{a}{r}\Big)^3\mathrm{d}t-(1-e^2)^{-3/2}\frac{M}{n}\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\sin^2 i\int\Big(\frac{a}{r}\Big)^3\cos 2(f+\omega)\mathrm{d}t\Big\}$$

$$=\frac{A_2}{p^{3/2}}\Big\{\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 i\Big)(f-M+e\sin f)$$

$$+\frac{1}{4}\sin^2 i\Big[e\sin(f+2\omega)+\sin 2(f+\omega)$$

$$+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)\Big]\Big\} \tag{7.49}$$

将(7.45)和(7.49)式代入(7.48)式后，可得M的一阶短周期项为

$$M_s=\frac{A_2\sqrt{1-e^2}}{ep^2}\Big\{\Big(\frac{3}{2}\sin^2 i-1\Big)\Big[\Big(1-\frac{1}{4}e^2\Big)\sin f$$

$$+\frac{e}{2}\sin 2f+\frac{e^2}{12}\sin 3f\Big]+\sin^2 i\Big[\Big(\frac{1}{4}+\frac{5}{16}e^2\Big)$$

$$\times\sin(f+2\omega)-\Big(\frac{7}{12}-\frac{1}{48}e^2\Big)\sin(3f+2\omega)$$

$$-\frac{3}{8}e\sin(4f+2\omega)-\frac{e^2}{16}\sin(5f+2\omega)$$

$$-\frac{e^2}{16}\sin(f-2\omega)\Big]\Big\}. \tag{7.50}$$

到此为止,我们已经得到了卫星全部根数的一阶短周期项 σ_s. 在积分过程中,由于作了积分变量变换 $t\to lf+m\omega$,故并不是所有的 $\bar{\sigma}_s=0$. 真正的短周期项应当是 $\sigma_s-\bar{\sigma}_s$ 即在 σ_s 中扣除非短周期项 $\bar{\sigma}_s$,这样才有 $\overline{\sigma_s-\bar{\sigma}_s}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sigma_s-\bar{\sigma}_s)\,dM=\bar{\sigma}_s-\bar{\sigma}_s=0$. 下面求出各个 $\bar{\sigma}_s$ 值.

我们知道 $a_s=2a^2R_s$ 和 $\bar{R}_s=0$,故显然有

$$\bar{a}_s=0. \tag{7.51}$$

在二体问题中,有椭圆坐标的展开式:

$$\left.\begin{aligned}
M&=f+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^2}\right)B^n\sin nf\\
\left(\frac{a}{r}\right)^{-2}&=(1-e^2)^{1/2}\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1\\
&\quad+n\sqrt{1-e^2})B^n\cos nf
\end{aligned}\right\}, \tag{7.52}$$

式中 $B=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}$. 利用(7.52)式和三角级数正交性可以得到某些函数的平均值.

$$\begin{aligned}
\overline{\sin qf}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin qf\,dM=(1-e^2)^{-1/2}\frac{1}{2\pi}\\
&\quad\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^{-2}\sin qf\,df=0,\\
\overline{\cos qf}&=(1-e^2)^{-1/2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^{-2}\cos qf\,df\\
&=(-1)^q(1+q\sqrt{1-e^2})B^q\\
&=(1+q\sqrt{1-e^2})\left(\frac{\sqrt{1-e^2}-1}{e}\right)^q,
\end{aligned}$$ 因而

$$\overline{\cos f} = -e,$$

$$\overline{\cos 2f} = \frac{1}{e^2}(\sqrt{1-e^2}-1)^2(1+2\sqrt{1-e^2})$$

$$= \frac{1}{e^2}[2(1-e^2)^{3/2}-3(1-e^2)+1],$$

$$\overline{\cos 3f} = \frac{1}{e^3}(\sqrt{1-e^2}-1)^3(1+3\sqrt{1-e^2})$$

$$= \frac{1}{e^3}[-8(1-e^2)^{3/2}+6(1-e^2)-1$$

$$+3(1-e^2)^2]，$$ 或者化为 $\overline{\cos 2f}$ 形式为

$$\overline{\cos 3f} = -\frac{4}{e}\overline{\cos 2f}+3e,$$

同样有

$$\overline{\cos 4f} = \frac{2}{e^2}(6-e^2)\overline{\cos 2f}-9,$$

$$\overline{\cos 5f} = -\frac{4}{e^3}(8-3e^2)\overline{\cos 2f}+\frac{1}{2}(24-5e^2).$$

另外还有

$$\overline{M-f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(M-f)\mathrm{d}M = (1-e^2)^{-1/2}$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^{-2}(M-f)\,\mathrm{d}f = 0.$$

将它们代入(7.30)、(7.32)、(7.43)、(7.46)和(7.50)式后，求平均值结果可得：

$$\bar{i}_s = \frac{A_2\sin 2i}{4p^2}\left(\overline{\cos 2f}+e\overline{\cos f}+\frac{e}{3}\overline{\cos 3f}\right)\cos 2\omega$$

$$= -\frac{A_2\sin 2i}{12p^2}\overline{\cos 2f}\cos 2\omega, \tag{7.53}$$

$$\bar{e}_s = \frac{A_2(1-e^2)}{6ep^2}\sin^2 i\,\overline{\cos 2f}\cos 2\omega, \tag{7.54}$$

$$\Omega_s = \frac{A_2 \cos i}{p^2}\left(\frac{1}{2}\overline{\cos 2f} + \frac{e}{6}\overline{\cos 3f} + \frac{e}{2}\overline{\cos f}\right)\sin 2\omega$$

$$= -\frac{A_2 \cos i}{6p^2}\overline{\cos 2f}\sin 2\omega, \tag{7.55}$$

$$\omega_s = \frac{A_2}{p^2}\left\{-\left[\frac{1}{4e}\sin^2 i + \left(\frac{1}{2} - \frac{15}{16}\sin^2 i\right)e\right]\overline{\cos f}\right.$$

$$- \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\sin^2 i\right)\overline{\cos 2f} + \left[\frac{7}{12e}\sin^2 i - \left(\frac{1}{6}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{19}{48}\sin^2 i\right)e\right]\overline{\cos 3f} + \frac{3}{8}\sin^2 i\,\overline{\cos 4f}$$

$$\left. + \frac{e}{16}\sin^2 i(\overline{\cos 5f} - \overline{\cos f})\right\}\sin 2\omega$$

$$= \frac{A_2}{p^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{1}{8} + \frac{1-e^2}{6e}\overline{\cos 2f}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\cos^2 i\,\overline{\cos 2f}\right]\sin 2\omega. \tag{7.56}$$

和

$$\overline{M}_s = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{A_2}{p^2}\sin^2 i\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{16}e^2\right)\overline{\cos f} - \left(\frac{7}{12}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{48}e^2\right)\overline{\cos 3f} - \frac{3}{8}e\,\overline{\cos 4f} - \frac{e^2}{16}\overline{\cos 5f} + \frac{e^2}{16}\overline{\cos f}\right]\sin 2\omega$$

$$= -\frac{A_2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\left(\frac{1}{8} + \frac{2+e^2}{12e^2}\overline{\cos 2f}\right)\sin 2\omega. \tag{7.57}$$

由(7.53)到(7.57)式可以看出σ_s包含有ω，它们实际上是一阶长周期项的一部分。因此本节所得到的σ_s是一阶短周期项和部分长周期项，真正的一阶纯短周期项是$\sigma_s - \sigma_{s0}$。

§3 带谐系数中 J_2^2 项所引起的摄动

在§1中，我们知道利用(7.14)式可以求出J_2^2项所引起的一阶长周期摄动和二阶长期摄动。它们所对应的计算式应当是其中

的 $\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_j}\right)(\sigma_s + \sigma_l)$ 这项。这里的 σ_s 是纯短周期项即相当于上节所得到的 $\sigma_s - \bar{\sigma}_s$。

由于含 J_2 项的摄动函数 R 可以分为二部分：常数项 R_1 和短周期项 R_s，我们用 $C(J_2)$ 表示含 J_2 的常数项(Constant terms)，用 SPT (J_2) 表示含 J_2 的短周期项 (Short-period terms)，则有 $R = C(J_2) + SPT(J_2)$ 和 $\frac{\partial R}{\partial \sigma} = C(J_2) + SPT(J_2)$，将它们代入(5.67)式后，仍有 $F_1 = C(J_2) + SPT(J_2)$ 和 $\frac{\partial F_1}{\partial \sigma} = C(J_2) + SPT(J_2)$。我们用 LPT (J_2) 表示含 J_2 的长周期项 (Long-period terms)，显然有 $C(J_2) \times SPT(J_2) = SPT(J_2^2)$，$C(J_2) \times LPT(J_2) = LPT(J_2^2)$ 和 $SPT(J_2) \times LPT(J_2) = SPT(J_2^2)$。但是 $SPT(J_2) \times SPT(J_2) = C(J_2^2) + SPT(J_2^2) + LPT(J_2^2)$。例如短周期项 $\cos(nM + l\omega)(n \neq 0)$ 与短周期项 $\cos(nM + k\omega)$ 相乘出现 $\cos\{2nM + (l + k)\omega\}$ 和 $\cos(l - k)\omega$；前项仍是短周期项，后项通常是长周期项，但当 $l = k$ 时就出现常数项。

本节中的 σ_s 是纯短周期项，即 $\sigma_s = SPT(J_2)$，故有

$$\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_s = C(J_2^2) + SPT(J_2^2) + LPT(J_2^2).$$

$\sigma_l = LPT(J_2)$，故有 $\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_l = SPT(J_2^2) + LPT(J_2^2)$。用 $\{F(M)\}$ 表示 $F(M)$ 对 M 求平均值 $\overline{F(M)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(M)\mathrm{d}M$；进一步用 $\{F(M)\}_c$ 表示取其中的常数部分，用 $\{F(M)\}_l$ 表示取其中的长周期部分。这样就有 $\left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_s\right\}_c = C(J_2^2)$，$\left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_s\right\}_l = LPT(J_2^2)$，$\left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_l\right\}_c = 0$ 和 $\left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_l\right\}_l = LPT(J_2^2)$。对于 $C(J_2^2)$，对 t 积分结果是二阶长期项；对于 $LPT(J_2^2)$，对 t 积分变换成对 ω 积分，在积分变换 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\omega\Big/\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \sim \frac{1}{J_2}\mathrm{d}\omega$ 过程中出现 $\frac{1}{J_2}$ 即降一阶，结

果是一阶长周期项。由此得到 J_2^2 项所引起的二阶长期项系数应是:

$$\sigma_2 = \left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_l\right\}_c \tag{7.58}$$

而 J_2^2 项所引起的一阶长周项应是:

$$\sigma_l = \int\left[\left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_s\right\}_l + \left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_l\right\}_l\right]dt \tag{7.59}$$

需要注意的是对于轨道根数 M,还有零阶项 $F_0 = n$。

由(7.59)式看到似乎出现这样的困难:为了要求出方程左端的 σ_l,需要事先知道右端积分中的 σ_l。但实际上由于

$$\mathrm{SPT}(J_2) \times \mathrm{LPT}(J_2) = \mathrm{SPT}(J_2^2),$$

故(7.59)式右端第二项中的 F_1 仅以 R_1 代替 R 即可,因为 R_1 产生的 $\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_l$ 仅是短周期项形式。由(7.22)式知道 R_1 仅是根数 a、e 和 i 的函数,故有 $\frac{\partial R_1}{\partial \Omega} = \frac{\partial R_1}{\partial \omega} = \frac{\partial R_1}{\partial M} = 0$。由(5.67)式可知对于根数 a、e 和 i,F_1 仅以 $\frac{\partial R_1}{\partial \Omega}$,$\frac{\partial R_1}{\partial \omega}$ 和 $\frac{\partial R_1}{\partial M}$ 出现,这时的 $F_1 = 0$,$\left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_l\right\}_l = 0$,于是(7.59)式变为

$$\sigma_l = \int\left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_s\right\}_l dt。(当\ \sigma_l = a, e, i\ 时) \tag{7.60}$$

对于根数 Ω、ω 和 M,由于 $\frac{\partial R_1}{\partial \Omega} = \frac{\partial R_1}{\partial \omega} = \frac{\partial R_1}{\partial M} = 0$ 或者 $\frac{\partial F_1}{\partial \Omega} = \frac{\partial F_1}{\partial \omega} = \frac{\partial F_1}{\partial M} = 0$,有 $\frac{\partial F_1}{\partial \Omega}\Omega_l = \frac{\partial F_1}{\partial \omega}\omega_l = \frac{\partial F_1}{\partial M}M_l = 0$,这时(7.59)式变为

$$\sigma_l = \int\left[\left\{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\sigma_s\right\}_l + \left\{\frac{\partial F_1}{\partial a}a_l + \frac{\partial F_1}{\partial e}e_l + \frac{\partial F_1}{\partial i}i_l\right\}\right]dt$$

$$(当\ \sigma_l = \Omega, \omega, M\ 时) \tag{7.61}$$

式中右端第二项 F_1 中的 $R = R_1$,因此 F_1 的形式分别为(7.24)式中的 Ω_1、ω_1 和 $M_1 - n$。

上面得到的(7.58)、(7.60)和(7.61)式就是我们用来求地球引力场中带谐系数 J_2^2 所引起的一阶长周期项 σ_1 和二阶长期项系数 σ_2 的计算公式。在计算过程中，将会遇到下列一些函数对 M 求平均值的问题，我们先把它们计算出来。

利用二体问题公式，可以得到 $\left(\frac{a}{r}\right)^p$ 对M的平均值是：

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos f)^{p-2}}{(1-e^2)^{p-3/2}}\mathrm{d}f, \tag{7.62}$$

根据牛顿二项式公式，当 $p\geqslant 2$ 时有：

$$(1+e\cos f)^{p-2}=\sum_{l=0}^{p-2}C_{p-2}^{l}e^{l}\cos^{l}f, \tag{7.63}$$

但是

$$\begin{aligned}\cos^l f&=\left(\frac{e^{if}+e^{-if}}{2}\right)^l=\frac{1}{2^l}e^{ilf}(1+e^{-2if})^l\\&=\frac{1}{2^l}e^{ilf}\sum_{m=0}^{l}C_l^m(e^{-2if})^m\\&=\frac{1}{2^l}\sum_{m=0}^{l}C_l^m e^{i(l-2m)f},\end{aligned} \tag{7.64}$$

将(7.64)式代入(7.63)式后，可得：

$$\begin{aligned}(1+e\cos f)^{p-2}=\sum_{l=0}^{p-2}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{e}{2}\right)^l C_{p-2}^{l}C_l^m[\cos(l-2m)f\\+i\sin(l-2m)f],\end{aligned} \tag{7.65}$$

式中

$$\begin{aligned}C_{p-2}^{l}C_l^m&=\frac{(p-2)!}{l!(p-l-2)!}\frac{l!}{m!(l-m)!}\\&=\frac{(p-2)!}{(p-l-2)!m!(l-m)!}.\end{aligned}$$

将(7.65)式代入(7.62)式后，利用富里叶级数正交性可得除余弦项中当 $l-2m=0$ 或者 $m=\frac{l}{2}$ 的项外，其余项及正弦项的

环积分都为零，这时有：

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p} = (1-e^2)^{3/2-p}\sum_{l=0}^{p-2}\left(\frac{e}{2}\right)^l$$

$$\times \frac{(p-2)!}{(p-l-2)!(l/2)!(l/2)!}, \qquad (7.66)$$

要求 m 是正整数，故 l 应是正偶数。若令 $l=2n$，$\left[\frac{p-2}{2}\right]$ 表示取其整数部分即$\left[\frac{p-2}{2}\right] \leqslant \frac{p-2}{2} = \frac{p}{2}-1$，则 (7.66) 式变为

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p} = (1-e^2)^{3/2-p}\sum_{n=0}^{\left[\frac{p-2}{2}\right]}\frac{(p-2)!}{(p-2n-2)!(n!)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n},$$

$$(p \geqslant 2) \qquad (7.67)$$

根据(7.67)式，表 7-1 列出了当 $p \geqslant 2$ 时$\left(\frac{a}{r}\right)^p$ 对 M 求平均值的具体表示式。

表 7-1 $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p}$ 的表示式

p	$p-2$	$\left[\frac{p-2}{2}\right]$	n	$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p}$
2	0	0	0	$(1-e^2)^{-1/2}$
3	1	0	0	$(1-e^2)^{-3/2}$
4	2	1	$0\to1$	$(1-e^2)^{-5/2}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)$
5	3	1	$0\to1$	$(1-e^2)^{-7/2}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)$
6	4	2	$0\to2$	$(1-e^2)^{-9/2}\left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right)$
7	5	2	$0\to2$	$(1-e^2)^{-11/2}\left(1+5e^2+\frac{15}{8}e^4\right)$
8	6	3	$0\to3$	$(1-e^2)^{-13/2}\left(1+\frac{15}{2}e^2+\frac{45}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6\right)$
……				……

利用富里叶级数正交性，由(7.65)式显然有

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \sin qf} = 0, \qquad (7.68)$$

另外，$\cos(l-2m)f\cos qf = \frac{1}{2}[\cos(l-2m+q)+\cos(l-2m-q)]$. 由于$m$从 0 到 l，故 $l-2m$ 应从 $-l$ 到 l 即有 $|l-2m|\leqslant l\leqslant p-2$. 若$q\geqslant p-1$，则有 $|l-2m|\leqslant p-2<p-1\leqslant q$ 即 $|l-2m|<q$，这时不会出现 $l-2m=\pm q$ 的项，同样利用富里叶级数正交性由(7.65)式可得：

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p\cos qf}=0,(p\geqslant 2,q\geqslant p-1), \tag{7.69}$$

上式意味着$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos f}=\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f}=\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos 3f}=\cdots=0$.

若 $q<p-1$，利用(7.65)式和富里叶级数正交性可知在 $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p\cos qf}$ 中除 $l-2m=\pm q$ 或者$m=\frac{l\pm q}{2}$这二项外其余环积分均为零. 求和号中要求 $m\geqslant 0$ 即要求 $l\geqslant q$，否则环积分也为零，这意味着求和号中 l 从 q 起始. 这样可得：

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p\cos qf}=(1-e^2)^{3/2-p}\sum_{l=q}^{p-2}\left(\frac{e}{2}\right)^l C_{p-2}^l\frac{1}{2}\left(C_l^{\frac{l+q}{2}}+C_l^{\frac{l-q}{2}}\right),$$

$$(p\geqslant 2,q<p-1) \tag{7.70}$$

式中

$$C_l^{\frac{l+q}{2}}=\frac{l!}{\left(\frac{l+q}{2}\right)!\left(\frac{l-q}{2}\right)!}=C_l^{\frac{l-q}{2}},\ \frac{1}{2}\left(C_l^{\frac{l+q}{2}}+C_l^{\frac{l-q}{2}}\right)C_{p-2}^l$$

$$=\frac{(p-2)!}{(p-l-2)!\left(\frac{l+q}{2}\right)!\left(\frac{l-q}{2}\right)!}.$$

为方便起见令$\frac{l-q}{2}=n$，这时 $l=2n+q$，$\frac{l+q}{2}=n+q$，求和号 l 从 q 到 $p-2$ 变为 n 从 0 到$\left[\frac{p-q-2}{2}\right]$，于是 (7.70)

式化为

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = (1-e^2)^{3/2-p} \sum_{n=0}^{\left[\frac{p-q-2}{2}\right]} \times \frac{(p-2)!}{(p-q-2n-2)!\,n!\,(n+q)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n+q}.$$

$$(p \geqslant 2, q < p-1) \tag{7.71}$$

根据 (7.71) 式，表 7-2 列出了对于 $p \geqslant 2$，$q < p-1$ 时 $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf}$ 对 M 平均值的具体表示式。

表 7-2 $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf}$ 的表示式

p	$p-1$	$p-2$	q	$\left[\frac{p-q-2}{2}\right]$	n	$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf}$
3	2	1	1	0	0	$\frac{1}{2}e(1-e^2)^{-3/2}$
4	3	2	1	0	0	$e(1-e^2)^{-5/2}$
			2	0	0	$\frac{1}{4}e^2(1-e^2)^{-5/2}$
5	4	3	1	1	0→1	$\frac{3}{2}e\left(1+\frac{e^2}{4}\right)(1-e^2)^{-7/2}$
			2	0	0	$\frac{3}{4}e^2(1-e^2)^{-7/2}$
			3	0	0	$\frac{1}{8}e^3(1-e^2)^{-7/2}$
6	5	4	1	1	0→1	$2e\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(1-e^2)^{-9/2}$
			2	1	0→1	$\frac{3}{2}e^2\left(1+\frac{1}{6}e^2\right)(1-e^2)^{-9/2}$
			3	0	0	$\frac{1}{2}e^3(1-e^2)^{-9/2}$
			4	0	0	$\frac{1}{16}e^4(1-e^2)^{-9/2}$
……						……

由二体问题公式有：

$$f - M = -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^2}\right)\beta^n \sin nf, \tag{7.72}$$

式中

$$\beta = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}.$$

由上式根据富里叶级数正交性显然可得：

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}(f-M)\cos qf}=0 \tag{7.73}$$

而

$$(f-M)\sin qf=-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{(1-e^{2})}\right)\beta^{n}\sin nf\sin qf$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^{2}}\right)\beta^{n}[\cos(n+q)f-\cos(n-q)f]. \tag{7.74}$$

由(7.74)式有：

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}(f-M)\sin qf}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^{2}}\right)\beta^{n}$$

$$\times\left[\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\cos(n+q)f}-\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\cos(n-q)f}\right], \tag{7.75}$$

根据 (7.69) 式得知在 (7.75) 式中右端求和号对于前项要求 $n+q<p-1$ 或者 $n<p-q-1$ 即 n 从 1 到 $p-q-2$，对于后项要求 $n-q<p-1$ 或者 $n<p+q-1$ 即 n 从 1 到 $p+q-2$，其余各项环积分均为零，这时(7.75)式变为

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}(f-M)\sin qf}=\sum_{n=1}^{p-q-2}(-1)^{n}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^{2}}\right)\beta^{n}$$

$$\times\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\cos(n+q)f}-\sum_{n=1}^{p+q-2}(-1)^{n}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^{2}}\right)\beta^{n}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\cos(n-q)f}, \tag{7.76}$$

特别是对于 $p=3$，这时要求 $q>0$，(7.76) 式右端第一项应为零。另外，上节曾得到$(1+n\sqrt{1-e^{2}})(-\beta)^{n}=\overline{\cos nf}$，故由(7.76)式可得：

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{3}(f-M)\sin qf}=-\sum_{n=1}^{q+1}\frac{1}{n}\overline{\cos nf}\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\cos(n-q)f}.$$

(7.77)

同样我们可以将 $\overline{\cos nf}$ 都化为 $\overline{\cos 2f}$ 形式，由此得出 $\left(\frac{a}{r}\right)^3\times(f-M)\sin qf$ 对M平均值的具体表示式，结果列在表 7-3 中。

表 7-3 $\left(\frac{a}{r}\right)^3(f-M)\sin qf$ 的表示式

q	n	$\left(\frac{a}{r}\right)^3(f-M)\sin qf$
1	1→2	$e(1-e^2)^{-3/2}\left(1-\frac{1}{4}\overline{\cos 2f}\right)$
2	1→3	$\frac{1}{6}(1-e^2)^{-3/2}\ \overline{\cos 2f}$
3	1→4	$e(1-e^2)^{-3/2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{6e^2}\ \overline{\cos 2f}\right)$
4	1→5	$\frac{1}{5}(1-e^2)^{-3/2}\ \left[\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{6}\right)\overline{\cos 2f}-\frac{3}{4}\right]$
……		……

利用表 7-1、7-2 和 7-3 以及 (7.68)、(7.69)式，由(7.58)式我们可以求出 J_2^2 所引起的二阶长期项系数是：

$$a_2=e_2=i_2=0 \tag{7.78}$$

$$\Omega_2=-\frac{A_2^2 n\cos i}{p^4}\left[\left(\frac{3}{2}+\sqrt{1-e^2}+\frac{1}{6}e^2\right)-\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}-\frac{5}{24}e^2\right)\sin i\right] \tag{7.79}$$

和

$$\omega_2=\frac{A_2^2 n}{p^4}\left[\left(4+2\sqrt{1-e^2}+\frac{7}{12}e^2\right)-\left(\frac{103}{12}+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}+\frac{3}{8}e^2\right)\sin^2 i+\left(\frac{215}{48}+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}-\frac{15}{32}e^2\right)\sin^4 i\right]. \tag{7.80}$$

在 §2 中已经得到卫星轨道半长径 a 的一阶长周项 $a_l=0$。由(7.60)式，我们可以求出 J_2 所引起的一阶长周期项：

$$e_l=\bar{e}_s+\frac{A_2 e\sin^2 i}{pa(4-5\sin^2 i)}\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i\right)\cos 2\omega \tag{7.81}$$

和

$$i_l = \bar{i}_s - \frac{A_2 e^2 \sin 2i}{p^2(4-5\sin^2 i)}\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i\right)\cos 2\omega。\qquad (7.82)$$

求出 a_l、e_l 和 i_l 后，由(7.61)式我们进一步可以求出：

$$\Omega_l = \bar{\Omega}_s - \frac{A_2 e^2 \cos i}{p^2(4-5\sin^2 i)^2}\left(\frac{7}{3}-5\sin^2 i+\frac{25}{8}\sin^4 i\right)\sin 2\omega \quad (7.83)$$

和

$$\omega_l = \bar{\omega}_s - \frac{A_2}{p^2(4-5\sin^2 i)^2}\left[\sin^2 i\left(\frac{25}{3}-\frac{245}{12}\sin^2 i+\frac{25}{2}\sin^4 i\right)\right.$$
$$\left.-e^2\left(\frac{7}{3}-\frac{17}{2}\sin^2 i+\frac{65}{6}\sin^4 i-\frac{75}{16}\sin^6 i\right)\right]\sin 2\omega \quad .$$
(7.84)

对于轨道根数 M，由(7.9)式可以看出，它还应具有零阶项 $F_0 = n$。由于 $n = a^{-3/2}$，故有 $\frac{\partial F_0}{\partial a} = -\frac{3n}{2a}$，$\frac{\partial^2 F_0}{\partial a^2} = \frac{15n}{4a^2}$。将它们代入(7.14)式后，可得：

$$M_2 = \frac{15n}{8a^2}\{a_l^2\}_c + \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\sigma_l\right\}_c \qquad (7.85)$$

和

$$M_l = \int\left[-\frac{3n}{2a}a_l^{(2)} + \frac{15n}{8a^2}\{a_l^2\}_l + \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}(\sigma_s+\sigma_l)\right\}\right]dt。\qquad (7.86)$$

由(7.27)式不难得到：

$$\{a_l^2\}_c = \frac{A_2^2}{p^2(1-e^2)^{3/2}}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\frac{1}{1-e^2}\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{3}e^2\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{6}e^4\right)-\frac{4}{9}\sqrt{1-e^2}\right]+\frac{\sin^4}{1-e^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^2\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{16}e^4\right)\right\} \qquad (7.87)$$

和

$$\{a_l^2\}_l = \frac{A_2^2}{p^2(1-e^2)^{3/2}}\left\{\sin^2 i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(2e^2+\frac{1}{3}e^4\right)\cos 2\omega\right.$$
$$\left.+\frac{1}{32}e^4\sin^4 i\cos 4\omega\right\}。\qquad (7.88)$$

另外，将能量积分(7.26)式进一步展开到 J_2^2，可得轨道半长径 a 的二阶长周期项：

$$a_l^{(2)}=\frac{A_2^2a}{p^4}\sqrt{1-e^2}\left\{\left[-\frac{1}{6}\sin^2i(4-5\sin^2i)\overline{\cos 2l}+e^2\sin^2i\left(\frac{17}{12}-\frac{19}{8}\sin^2i\right)\right]\cos 2\omega+\frac{e}{1-e^2}\left[\frac{7}{3}\sin^2i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2i\right)\cos 2\omega+\frac{1}{32}\sin^4i\cos 4\omega\right]\right\}. \tag{7.89}$$

利用（7.87)、(7.88）和（7.89）式，采用同样的方法可以从(7.85)和（7.86）式求出轨道根数 M 的二阶长期项系数和一阶长周期项分别为

$$M_2=\frac{A_2^2n}{p^4}\sqrt{1-e^2}\left[\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\sqrt{1-e^2}+\frac{5}{12}e^2\right)-\left(\frac{25}{12}+2\sqrt{1-e^2}+\frac{5}{12}e^2\right)\sin^2i+\left(\frac{65}{48}+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}-\frac{25}{96}e^2\right)\sin^4i\right] \tag{7.90}$$

和

$$M_l=\bar{M}_s+\frac{A_2\sqrt{1-e^2}\sin i}{p^2(4-5\sin^2i)}\left[\left(\frac{25}{12}-\frac{5}{2}\sin^2i\right)-e^2\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2i\right)\right]\sin 2\omega. \tag{7.91}$$

在 σ_l 中的 $\bar{\sigma}_s$ 表示式分别为(7.53)—(7.57)式。

到此为此，我们已经求出了带谐系数 J_2 项所引起的 6 个轨道根数 σ 的一阶和二阶长期项系数 σ_1 和 σ_2；一阶纯短周期项 $\sigma_s-\bar{\sigma}_s$ 和长周期项 $\sigma_l=\bar{\sigma}_s+\sigma_l^*$。其中 σ_l^* 表示 σ_l 中的后一项。我们可以将卫星轨道根数的一阶周期项统一写为 $\sigma_s-\bar{\sigma}_s+\sigma_l=\sigma_s+\sigma_l^*$，这里的 σ_s 是一阶短周期项和部分长周期项，σ_l^* 是其余的长周期项。它们可以在一起计算。

§4 高阶带谐系数 $J_n(n>2)$ 项所引起的摄动

由第一章表 1-1 可以看出在地球引力场位函数展开式中带谐

系数 J_3、$J_4 \sim 10^{-6}$，可以认为它们是二阶小量；J_5 以后约在 10^{-7} 数量级，它们相互间相差不多；因此需要考虑 $J_n(n>2)$ 各项对卫星运动的影响。另外，也可以利用卫星轨道根数的变化反测这些系数从而研究地球引力场的情况进行卫星测地工作。本节推算出 $J_n(n>2)$ 项对卫星各个轨道根数所引起的摄动。

为了方便起见，我们可以把带谐系数分为二大类：偶阶带谐系数 J_{2n} 和奇阶带谐系数 J_{2n+1}。这时由(7.5)式可以把地球形状摄动的摄动函数写为

$$R=-\frac{J_{2n}}{r^{2n+1}}P_{2n}(\mu)-\frac{J_{2n+1}}{r^{2n+2}}P_{2n+1}(\mu) \tag{7.92}$$

其中 $\mu=\sin\varphi=\sin i\sin u$，$P_{2n}(\mu)$ 和 $P_{2n+1}(\mu)$ 是以 μ 为引数的第 $2n$ 阶和 $2n+1$ 阶勒让德多项式。根据勒让德多项式的性质，它们可以表示为：

$$\left.\begin{aligned}P_{2n}(\mu)&=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(4n-2m-1)!!}{(2m)!!(2n-2m)!}\mu^{2n-2m}\\P_{2n+1}(\mu)&=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(4n-2m+1)!!}{(2m)!!(2n-2m+1)!}\mu^{2n-2m+1}\end{aligned}\right\}, \tag{7.93}$$

式中

$$\begin{aligned}(2m)!!&=2m(2m-2)(2m-4)\cdots\cdots\\&\quad\times4\times2,\\(4n-2m-1)!!&=(4n-2m-1)(4n-2m-3)\cdots\cdots\\&\quad\times3\times1,\cdots\cdots.\end{aligned}$$

若令 $n-m=s$，则有 $m=n-s$，$4n-2m=2n+2s$，求和号中 m：$0\to n$ 变为 s：$n\to 0$。这时(7.93)式变为

$$\left.\begin{aligned}P_{2n}(\mu)&=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\frac{(2n+2s-1)!!}{(2n-2s)!!(2s)!}\mu^{2s}\\P_{2n+1}(\mu)&=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\frac{(2n+2s+1)!!}{(2n-2s)!!(2s+1)!}\mu^{2s+1}\end{aligned}\right\}. \tag{7.94}$$

式中

$$(2n-2s)!!=(2n-2s)(2n-2s-2)\cdots\cdots\times 4\times 2$$
$$=2^{n-s}(n-s)!,$$
$$(2n+2s-1)!!=(2n+2s-1)(2n+2s$$
$$-3)\cdots\cdots\times 3\times 1,\cdots\cdots。$$

在(7.94)式中，$\mu^{2s}=\sin^{2s}i\sin^{2s}u$，$\mu^{2s+1}=\sin^{2s+1}i\sin^{2s+1}u$。我们可以将 $\sin^{2s}u$ 和 $\sin^{2s+1}u$ 积化和差。事实上

$$i\sin u=\frac{1}{2}\left(e^{iu}-e^{-iu}\right)=\frac{1}{2}e^{iu}(1-e^{-2iu}),$$

$$(i\sin u)^{2s}=\frac{1}{2^{2s}}e^{2isu}(1-e^{-2iu})^{2s}。$$

但是 $(i)^{2s}=(-1)^s$，$(1-e^{-2iu})^{2s}=\sum\limits_{m=0}^{2s}(-1)^m C_{2s}^m e^{-2imu}$，故有 $\sin^{2s}u=\frac{1}{2^{2s}}\sum\limits_{m=0}^{2s}(-1)^{-s+m}C_{2s}^m e^{2i(s-m)u}$。若令 $s-m=k$，则求和号中 m：$0\to 2s$ 变为 k：$s\to -s$。于是 $\sin^{2s}u=\frac{1}{2^{2s}}\sum\limits_{k=-s}^{s}(-1)^{-k}\times C_{2s}^{s-k}e^{2iku}$。上式左端是实数，故右端也取实数部分 $\mathrm{Re}(e^{2iku})=\cos 2ku$。另外，求和号可以分为 $\sum\limits_{k=-s}^{s}=\sum\limits_{k=-1}^{-s}+\sum\limits_{k=1}^{s}+(k=0$ 的项)。这时有 $2^{2s}\sin^{2s}u=C_{2s}^s+\sum\limits_{k=-1}^{-s}(-1)^{-k}C_{2s}^{s-k}\cos 2ku+\sum\limits_{k=1}^{s}(-1)^{-k}C_{2s}^{s-k}\cos 2ku$。利用 $(-1)^{-k}=(-1)^k$，$C_{2s}^{s-k}=C_{2s}^{s+k}=\frac{(2s)!}{(s-k)!(s+k)!}$和 $C_{2s}^s=\frac{(2s)!}{(s!)^2}$，可得：

$$\sin^{2s}u=\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}+\sum_{k=1}^{s}\frac{(-1)^k(2s)!}{2^{2s-1}(s-k)!(s+k)!}\cos 2ku. \tag{7.95}$$

同样$(i\sin u)^{2s+1}=\frac{1}{2^{2s+1}}\sum\limits_{m=0}^{2s+1}(-1)^m C_{2s+1}^m e^{i(2s-2m+1)u}$。令 $s-m=k$，求和号中 m：$0\to 2s+1$ 变为 k：$s\to -(s+1)$，则上式成

为 $i(-1)^s 2^{2s+1}\sin^{2s+1}u = \sum\limits_{k=-(s+1)}^{s}(-1)^{s-k}C_{2s+1}^{s-k}e^{i(2k+1)u}$. 该式左端是虚数，故右端也取虚数部分 $\mathrm{Im}(e^{i(2k+1)u}) = \sin(2k+1)u$. 于是有 $2^{2s+1}\sin^{2s+1}u = \sum\limits_{k=-(s+1)}^{s}(-1)^{-k}\ C_{2s+1}^{s-k}\sin(2k+1)u$. 求和号 $\sum\limits_{k=-(s+1)}^{s} = \sum\limits_{k=0}^{s} + \sum\limits_{k=-1}^{-(s+1)} = \sum\limits_{k=0}^{s} + \sum\limits_{k'=0}^{s}$，其中 $k' = -(k+1)$，k: $-1 \to -(s+1)$ 变为 k: $0 \to s$. 另外，

$$C_{2s+1}^{s+k'+1} = C_{2s+1}^{s-k'} = \frac{(2s+1)!}{(s+k'+1)!(s-k')!},$$

故有 $\sum\limits_{k'=0}^{s}(-1)^{k'+1}C_{2s+1}^{s+k'+1}\sin(-2k'-1) = \sum\limits_{k'=0}^{s}(-1)^{k'}C_{2s+1}^{s-k'}\sin(2\times k'+1)$. 这样上式求和号可以分为二项经合并后可得：

$$\sin^{2s+1}u = \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{(2s+1)!}{2^{2s}(s+k+1)!(s-k)!}\sin(2k+1)u. \tag{7.96}$$

将(7.94)、(7.95)和(7.96)式代入(7.92)式后可得：

$$R = -\frac{J_{2n}}{r^{2n+1}}\left\{\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\frac{(2n+2s-1)!!}{2^{2s}(2n-2s)!!(s!)^2}\sin^{2s}i\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\cos 2ku\sum_{s=k}^{n}(-1)^{n-s+k}$$

$$\times\frac{(2n+2s-1)!!}{2^{2s-1}(2n-2s)!!(s-k)!(s+k)!}$$

$$\left.\times\ \sin^{2s}i\right\} - \frac{J_{2n+1}}{r^{2n+2}}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\sin(2k+1)u\sum_{s=k}^{n}(-1)^{n-s+k}$$

$$\frac{(2n+2s+1)!!}{2^{2s}(2n-2s)!!(s-k)!(s+k+1)!}\sin^{2s+1}i \tag{7.97}$$

式中 $\cos 2ku = \cos 2k\omega\cos 2kf - \sin 2k\omega\sin 2kf$, $\sin(2k+1)u = \sin(2k+1)\omega\cos(2k+1)f + \cos(2k+1)\omega\sin(2k+1)f$. 另外其右端第二项原来求和号是 s: $0\to n$ 和 k: $1\to s$, 这意味着 $k\leqslant s$ 即 s 应从 k 起始，故可写为 s: $k\to n$ 和 k: $1\to n$; 同样第三项原来求和号是 s: $0\to n$ 和 k: $0\to s$ 也可改写为 s: $k\to n$ 和 k: $0\to n$。

为了分离出 R 中的非短周期部分，我们可以将 R 对 M 求平均值。由(7.67)、(7.68)、(7.69)和(7.71)式有:

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}} = (1-e^2)^{1/2-2n}\sum_{h=0}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2n-2h-1)!(h!)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h},$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\sin 2kf} = \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+2}\sin(2k+1)f} = 0,$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\cos 2kf}$$

$$=\begin{cases}0, & (k=n)\\ (1-e^2)^{1/2-2n}\displaystyle\sum_{h=0}^{n-k-1}\frac{(2n-1)!}{(2n-2k-2h-1)!h!(h+2k)!} \\ \qquad\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}. & (k<n)\end{cases}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+2}\cos(2k+1)f}$$

$$=\begin{cases}0, & (k=n)\\ (1-e^2)^{-1/2-2n}\displaystyle\sum_{h=0}^{n-k-1}\frac{(2n)!}{(2n-2k-2h-1)!h!(h+2k+1)!} \\ \qquad\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}. & (k<n)\end{cases}$$

利用这些公式将(2.162)式对 M 求平均值后可得:

$$\bar{R} = -\frac{J_{2n}}{a^{2n+1}}\left\{\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\frac{(2n+2s-1)!!}{2^{2s}(2n-2s)!!(s!)^2}(1-e^2)^{1/2-2n}\sin^{2s}i\right.$$

$$\sum_{h=0}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2n-2h-1)!(h!)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h} + \sum_{k=1}^{n}\cos 2k\omega\sum_{s=k}^{n}(-1)^{n-s+k}$$

$$\times \frac{(2n+2s-1)!!}{2^{2s-1}(2n-2s)!!(s-k)!(s+k)!}(1-e^2)^{1/2-2n}$$

$$\times \sin^{2s} i \sum_{h=0}^{n-k-1} \frac{(2n-1)!}{(2n-2k-2h-1)!h!(h+2k)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\Bigg\}$$

$$-\frac{J_{2n+1}}{a^{2n+2}}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)\omega \sum_{s=k}^{n}(-1)^{n-s+k}$$

$$\times \frac{(2n+2s-1)!!}{2^{2s}(2n-2s)!!(s-k)!(s+k+1)!}(1-e^2)^{-1/2-2n}$$

$$\times \sin^{2s+1} i \sum_{h=0}^{n-k-1} \frac{(2n)!}{(2n-2k-2h-1)!h!(h+2k+1)!}$$

$$\times \left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\Bigg\}。 \tag{7.98}$$

上式右端第一项是与ω无关的常数项，它只能使卫星的轨道根数产生长期变化，我们用 R_s 来表示，其中与卫星根数无关的系数可以用 $F_{n,h,s}$ 来表示。第二项和第三项与ω有关，它使卫星的轨道根数产生长周期变化，我们用 R_l 来表示，同样它们中与卫星根数无关的系数分别用 $G_{n,k,h,s}$ 和 $H_{n,k,h,s}$ 来表示。这样(7.98)式可以写为

$$\bar{R} = R_s + R_l, \tag{7.99}$$

其中

$$R_s = \sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{n-1} F_{n,h,s}\, a^{-(2n+1)}(1-e^2)^{1/2-2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h}\sin^{2s} i \tag{7.100}$$

和

$$R_l = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1} G_{n,k,h,s}a^{-(2n+1)}(1-e^2)^{1/2-2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\sin^{2s} i$$

$$\times \cos 2k\omega + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1} H_{n,k,h,s}a^{-(2n+2)}(1-e^2)^{-1/2-2n}$$

$$\times \left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\sin^{2s+1} i \sin(2k+1)\omega。 \tag{7.101}$$

式中系数：

$$F_{n,k,h,s}=\frac{(-1)^{n-s+1}J_{2n}(2n+2s-1)!!(2n-1)!}{2^{n+s}(n-s)!(2n-2h-1)!(s!h!)^2},\tag{7.102}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_{n,k,h,s}\\&=\frac{(-1)^{n-s+k+1}J_{2n}(2n+2s-1)!!(2n-1)!!(n-1)!}{2^s(n-s)!(2n-2k-2h-1)!(s-k)!(s+k)!h!(h+2k)!}\\&H_{n,k,h,s}\\&=\frac{(-1)^{n-s+k+1}J_{2n+1}(2n+2s+1)!!(2n-1)!!n!}{2^s(n-s)!(2n-2k-2h-1)!(s-k)!(s+k+1)!h!(h+2k+1)!}\end{aligned}\right\},\tag{7.103}$$

在(7.102)式中，利用了$(2n-2s)!!=(2n-2s)(2n-2s-2)\cdots\cdots\times4\times2=2^{n-s}(n-s)!$；在(7.103)式中，利用了这式以及$(2n-1)!=(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\cdots\times3\times2\times1=2^{n-1}(2n-1)!!(n-1)!$和$(2n)!=2^n(2n-1)!!n!$。

根据(7.102)和(7.103)式很容易制成系数表 7-4。

表 7-4 系数表

n	1	1	2	2	2
k	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0
s	0	1	0	1	2
$F_{n,k,h,s}$	$\frac{1}{2}J_2$	$-\frac{3}{4}J_2$	$-\frac{3}{8}J_4$	$\frac{15}{8}J_4$	$-\frac{105}{64}J_4$
$G_{n,k,h,s}$	—	—	—	—	—
$H_{n,k,h,s}$	$3J_3$	$-\frac{15}{4}J_3$	$-\frac{15}{2}J_5$	$\frac{105}{4}J_5$	$-\frac{315}{16}J_5$

n	2	2	2	2	2	……
k	0	0	0	1	1	……
h	1	1	1	0	0	……
s	0	1	2	1	2	……
$F_{n,k,h,s}$	$-\frac{9}{4}J_4$	$\frac{45}{4}J_4$	$-\frac{315}{32}J_4$	—	—	……
$G_{n,k,h,s}$	—	—	—	$-\frac{45}{8}J_4$	$\frac{105}{16}J_4$	……
$H_{n,k,h,s}$	$-\frac{45}{2}J_5$	$\frac{315}{4}J_5$	$-\frac{945}{16}J_5$	$-\frac{35}{4}J_5$	$\frac{315}{32}J_5$	……

由(7.100)和(7.101)式可以看到 R_c 中仅含 J_{2n};这意味着只有偶阶带谐系数才会使卫星根数产生长期变化。另外 R_c 仅是 a、e 和 i 的函数，这时 $\frac{\partial R_c}{\partial \Omega}=\frac{\partial R_c}{\partial \omega}=\frac{\partial R_c}{\partial M}=0$，由(5.67)式得知 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0$，这意味着在地球引力场中各阶带谐系数对卫星根数 a、e 和 i 都不会产生长期变化。

利用(7.100)式有:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R_c}{\partial a} &= -\frac{2n+1}{a}R_c \\
\frac{\partial R_c}{\partial e} &= \sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{n-1} F_{n,h,s}a^{-(2n+1)}\left[h+\left(2n-h-\frac{1}{2}\right)e^2\right] \\
&\quad \times (1-e^2)^{-1/2-2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h-1}\sin^{2s}i \\
\frac{\partial R_c}{\partial i} &= \sum_{s=1}^{n}\sum_{h=0}^{n-1} 2sF_{n,h,s}a^{-(2n+1)}(1-e^2)^{1/2-2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h} \\
&\quad \times \sin^{2s-1}i\cos i
\end{aligned}\right\}, \quad (7.104)
$$

将(7.104)式代入(5.67)式后可得带谐系数对卫星轨道根数所产生的长期项的系数是:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\bar{n}\cos i}{p^{2n}}\sum_{s=1}^{n}\sum_{h=0}^{n-1} sF_{n,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h}\sin^{2s-2}i \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\bar{n}}{p^{2n}}\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{n-1} F_{n,h,s}\left(2n-h-\frac{1}{2}+s+\frac{h}{e^2}\right. \\
&\quad \left.-\frac{s}{\sin^2 i}\right)\left(\frac{e}{2}\right)^{2h}\sin^{2s}i \\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= \bar{n}+\frac{2\bar{n}\sqrt{1-e^2}}{p^{2n}}\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{n-1} F_{n,h,s}\left(h+\frac{3}{2}-\frac{h}{e^2}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{e}{2}\right)^{2h}\sin^{2s}i
\end{aligned}\right\}, \quad (7.105)
$$

这里$p=a(1-e^2)$，$\bar{n}$是卫星的平均运动，以与阶数n区别.

根据(7.14)式知道高阶带谐系数对卫星轨道根数所产生的长周期项是:

$$\sigma_l=\int\left\{\frac{\partial F_1}{\partial\sigma}\sigma_l+F_2\right\}dt. \qquad (7.106)$$

上式右端的 F_1 是 J_2 所引起的摄动，σ_l 和 F_2 是 $J_n(n>2)$所引起的摄动. 与上节同样情况，由于 F_1 中的R只要以 R_1 代入，而 R 仅是根数 a、e 和 i 的函数，但对于 a、e 和 i，F_1 仅以 $\frac{\partial R_1}{\partial\Omega}$、$\frac{\partial R_1}{\partial\omega}$ 和 $\frac{\partial R_1}{\partial M}$ 的形式出现，故(7.106)式又可以写为

$$\sigma_l=\int\{F_2\}dt \qquad \text{当}\ \sigma\ \text{为}\ a、e、i \qquad (7.107)$$

和

$$\sigma_l=\int\left\{\frac{\partial F_1}{\partial a}a_l+\frac{\partial F_1}{\partial e}e_l+\frac{\partial F_1}{\partial i}i_l+F_2\right\}dt.$$

(当σ 为 Ω、ω、M) (7.108)

我们可以先从(7.107)式算出 a_l、e_l 和 i_l，将它们代入(7.108)式后可以算出 Ω_l、ω_l 和 M_l.

下面先计算诸$\{F_2\}$. 由(7.101)式不难得到:

$$\frac{\partial R_l}{\partial\Omega}=\frac{\partial R_l}{\partial M}=0$$

$$\frac{\partial R_l}{\partial a}=-(2n+1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}G_{n,k,h,s}a^{-(2n+2)}(1-e^2)^{1/2-2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\sin^{2s}i\cos 2k\omega-(2n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}H_{n,k,h,s}a^{-(2n+3)}(1-e^2)^{-1/2-2n}\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\sin^{2s+1}i\sin(2k+1)\omega$$

$$\frac{\partial R_l}{\partial e}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{k}2G_{n,k,h,s}a^{-(2n+1)}\cdots$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\times\left[(4n-2h-2k-1)+\frac{2}{e^2}(h+k)\right]\\
&\times(1-e^2)^{-1/2-2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\sin^{2s}i\cos 2k\omega\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}2H_{n,k,h,s}a^{-(2n+2)}\Big[2(2n-h-k)\\
&+\frac{1}{e^2}(2h+2k+1)\Big](1-e^2)^{-3/2-2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+2}\\
&\times\sin^{2s+1}i\sin(2k+1)\omega\\
\frac{\partial R_L}{\partial i}&=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}2sG_{n,k,h,s}a^{-(2n+1)}(1-e^2)^{1/2-2n}\\
&\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\sin^{2s-1}i\cos i\cos 2k\omega+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}\\
&\times(2s+1)H_{n,k,h,s}a^{-(2n+2)}(1-e^2)^{-1/2-2n}\\
&\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\sin^{2s}i\cos i\sin(2k+1)\omega\\
\frac{\partial R_L}{\partial\omega}&=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}(-2k)G_{n,k,h,s}a^{-(2n+1)}(1-e^2)^{1/2-2n}\\
&\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\sin^{2s}i\sin 2k\omega+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}(2k+1)\\
&\times H_{n,k,h,s}a^{-(2n+2)}(1-e^2)^{-1/2-2n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\\
&\times\sin^{2s+1}i\cos(2k+1)\omega
\end{aligned}
\right\}\quad(7.109)
$$

由(7.109)的第一式有:

$$
\{F_a\}=2a^{1/2}\frac{\partial R_L}{\partial M}=0。\qquad(7.110)
$$

将(7.110)式代入(7107)式后可得:

$$
a_l=0。\qquad(7.111)
$$

由(7.109)的第一和第五式有:

$$
\{F_i\}=\frac{\operatorname{ctg}i}{p^{1/2}}\frac{\partial R_L}{\partial\omega}=\frac{\bar{n}\operatorname{ctg}i}{p^{2n}}\Bigg\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}(-2k)G_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}
$$

$$\sin^{2s} i \sin 2k\omega + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}(2k+1)H_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}$$

$$\sin^{2s+1} i \cos(2k+1)\omega. \tag{7.112}$$

将(7.112)式代入(7.107)式后，进行积分变量变换 $dt = d\omega/\omega_1$，这里 $\omega_1 = \frac{3J_2 n}{4p^2}(4 - 5\sin^2 i)$，我们可得：

$$i_l = \frac{4\operatorname{ctg} i}{3J_2(4-5\sin^2 i)p^{2n-2}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}G_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\sin^{2s} i\right.$$

$$\times \cos 2k\omega + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}H_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\sin^{2s+1} i$$

$$\left.\times \sin(2k+1)\omega\right\}. \tag{7.113}$$

对于 e_l，由于 $a_l = 0$ 故仍可利用(7.33)式，结果是

$$e_l = -\frac{4(1-e^2)}{3J_2(4-5\sin^2 i)e\,p^{2n-2}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}G_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\right.$$

$$\times \sin^{2s} i\cos 2k\omega + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}H_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\sin^{2s+1} i$$

$$\left.\times \sin(2k+1)\omega\right\}. \tag{7.114}$$

在求 Ω_l、ω_l 和 M_l 时，由(7.108)式知道除要计算 $\{F_l\}$ 外，还要计算$\left\{\frac{\partial F_1}{\partial a}a_l + \frac{\partial F_1}{\partial e}e_l + \frac{\partial F_1}{\partial i}i_l\right\}$。这里 F_1 中 R 只要取 R_1，故对 Ω、$F_1 = \Omega_1$；对 ω，$F_1 = \omega_1$；对 M，$F_1 = M_1 - n$。利用 $a_l = 0$，$e_l = -\frac{1-e^2}{e}\operatorname{tg} i\, i_l$ 以及(7.24)式和 $A_2 = \frac{3}{2}J_2$，可得对于轨道根数 Ω 有：

$$\left\{\frac{\partial F_1}{\partial a}a_l + \frac{\partial F_1}{\partial e}e_l + \frac{\partial F_1}{\partial i}i_l\right\} = \frac{15J_2\bar{n}}{2p^2}\sin i\, i_l. \tag{7.115}$$

对于轨道根数 ω 有：

$$\left\{\frac{\partial F_1}{\partial a}a_l + \frac{\partial F_1}{\partial e}e_l + \frac{\partial F_1}{\partial i}i_l\right\} = -\frac{3J_2\bar{n}}{2p^2}\operatorname{tg} i(13 - 15\sin^2 i)i_l.$$

$$(7.116)$$

对于轨道根数M有:

$$\left\{\frac{\partial F_1}{\partial a}a_1+\frac{\partial F_1}{\partial e}e_1+\frac{\partial F_1}{\partial i}i_1\right\}=-\frac{9J_2\bar{n}}{4P^2}\times(1-e^2)^{1/2}\mathrm{tg}\,i(4-5\sin^2 i)i_1. \tag{7.117}$$

由(7.109)的第四式有:

$$\{F_\Omega\}=\frac{1}{p^{1/2}\sin i}\frac{\partial R_1}{\partial i}=\frac{n\cos i}{p^{2n}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}2sG_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\right.$$

$$\times\sin^{2s-2}i\cos 2k\omega+\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}(2s+1)H_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}$$

$$\left.\times\sin^{2s-1}i\sin(2k+1)\omega\right\}. \tag{7.118}$$

将(7.113)、(7.115)、和(7.118)式一起代入(7.108)式后，同样进行积分变量变换 $dt=d\omega/\omega_1$，积分结果是:

$$\Omega_1=\frac{4\cos i}{3J_2(4-5\sin^2 i)^2p^{2n-2}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}\frac{1}{k}G_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\right.$$

$$\times\left(\frac{4s}{\sin^2 i}-5s+5\right)\sin^{2s}i\sin 2k\omega-\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}\frac{2}{2k+1}H_{n,k,h,s}$$

$$\left.\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\left(\frac{4s+2}{\sin^2 i}-5s+\frac{5}{2}\right)\sin^{2s+1}i\cos(2k+1)\omega\right\}. \tag{7.119}$$

由(7.109)第三式和(7.118)式有:

$$\{F_\omega\}=-\cos i\{F_\Omega\}+\frac{p^{1/2}}{ae}\frac{\partial R_1}{\partial e}=\frac{\bar{n}}{p^{2n}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}G_{n,k,h,s}\right.$$

$$\times\left[\frac{2(h+k)}{e^2}+2(2n-h-k+s)-1-\frac{2s}{\sin^2 i}\right]$$

$$\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\sin^{2s}i\cos 2k\omega+\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}H_{n,k,h,s}\left[\frac{2h+2k+1}{e^2}\right.$$

$$\left.+2(2n-h-k+s)+1-\frac{2s+1}{\sin^2 i}\right]\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}$$

$$\left.\times\sin^{2s+1}i\sin(2k+1)\omega\right\}. \tag{7.120}$$

将(7.113)、(7.116)和(7.120)式一起代入(7.108)式后，进行积分变量变换 $dt = d\omega/\omega_1$，积分结果是:

$$\omega_l = \frac{4}{3J_2(4-5\sin^2 i)^2 p^{2n-2}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}\frac{1}{k}G_{n,k,h,s}\right.$$

$$\times\left[\frac{(h+k)(4-5\sin^2 i)}{e^2} - \frac{4s}{\sin^2 i} + 8n - 4h - 4k + 9s\right.$$

$$\left.-15-5\left(2n-h-k+s-\frac{7}{2}\right)\sin^2 i\right]\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k}\sin^{2s} i$$

$$\times\sin 2k\omega - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}\frac{2}{2k+1}H_{n,k,h,s}$$

$$\times\left[\frac{(2h+2k+1)(4-5\sin^2 i)}{2e^2} - \frac{4s+2}{\sin^2 i} + 8n - 4h\right.$$

$$\left.-4k+9s-\frac{17}{2}-5\left(2n-h-k+s-\frac{5}{2}\right)\sin^2 i\right]$$

$$\left.\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k+1}\sin^{2s+1} i\cos(2k+1)\omega\right\}. \tag{7.121}$$

由(7.109)的第二和第三式有:

$$\{F_M\} = -2a^{1/2}\frac{\partial R_l}{\partial a} - \frac{p}{a^{3/2}e}\frac{\partial R_l}{\partial e} = \frac{-\bar{n}(1-e^2)^{1/2}}{2p^{2n}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\right.$$

$$\times\sum_{h=0}^{n-k-1}G_{n,k,h,s}\left[(h+k)-\left(h+k+\frac{3}{2}\right)e^2\right]\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k-2}$$

$$\sin^{2s} i\cos 2k\omega + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}H_{n,k,h,s}\left[\left(h+k+\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.\left.-(h+k+2)e^2\right]\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k-1}\sin^{2s+1} i\sin(2k+1)\omega\right].$$

$$(7.122)$$

将(7.113)、(7.117)和(7.122)式一起代入(7.108)式后，进行积分变量变换 $dt = d\omega/\omega_1$，积分结果是:

$$M_l = -\frac{(1-e^2)^{3/2}}{3J_2(4-5\sin^2 i)p^{2n-2}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}\frac{1}{k}(h+k)G_{n,k,h,s}\right.$$

$$\times\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k-2}\sin^{2s}i\sin 2k\omega-\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=k}^{n}\sum_{h=0}^{n-k-1}\frac{1}{2k+1}$$

$$\times(2h+2k+1)H_{n,k,h,s}\left(\frac{e}{2}\right)^{2h+2k-1}\sin^{2s+1}i\cos(2k+1)\omega\Big\}. \tag{7.123}$$

上面得到的 (7.105)、(7.111)、(7.113)、(7.114)、(7.119)(7.121)和(7.123) 式就是高阶带谐系数对卫星轨道根数所产生的二阶长期项和一阶长周期项。利用表 7-4可以求出各个 $J_n(n>2)$ 所引起摄动的具体表示式。

在 (7.105) 式中，取 $n=2$，可得 J_4 项对卫星轨道根数产生的二阶长期项是：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{dt}=\frac{de}{dt}=\frac{di}{dt}=0\\
&\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\bar{n}\cos i}{p^2}\Big(2F_{2,0,1}+\frac{e^2}{2}F_{2,1,1}+4\sin^2 i\,F_{2,0,2}+e^2\sin^2 i\\
&\qquad\times F_{2,1,2}\Big)=-\frac{15J_4}{32p^4}\bar{n}\cos i(2+3e^2)(4-7\sin^2 i);\\
&\frac{d\omega}{dt}=\frac{2n}{p}\Big\{\frac{7}{2}F_{2,0,0}+\Big(\frac{9}{2}\sin^2 i-1\Big)F_{2,0,1}+\Big(\frac{11}{2}\sin^2 i\\
&\qquad-2\Big)\sin^2 i\,F_{2,0,2}+\Big(\frac{5}{8}e^2+\frac{1}{4}\Big)F_{2,1,0}\\
&\qquad+\Big[\Big(\frac{7}{8}e^2+\frac{1}{4}\Big)\sin^2 i-\frac{e^2}{4}\Big]F_{2,1,1}\\
&\qquad+\Big[\Big(\frac{9}{8}e^2+\frac{1}{4}\Big)\sin^2 i-\frac{e^2}{2}\Big]\sin^2 i\,F_{2,1,2}\Big\}\\
&\quad=-\frac{105J_4}{16p^4}\bar{n}\Big[\frac{1}{7}(8+9e^2)-\frac{1}{7}\Big(31+\frac{63}{2}e^2\Big)\sin^2 i\\
&\qquad+\frac{1}{8}(28+27e^2)\sin^4 i\Big];\\
&\frac{dM}{dt}=n+\frac{n(1-e^2)^{1/2}}{p^2}\Big[3F_{2,0,0}+3\sin^2 i\,F_{2,0,1}+3\sin^4 i\\
&\qquad\times F_{2,0,2}-\Big(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^2\Big)F_{2,1,0}-\Big(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e^2\Big)
\end{aligned}\right\} \tag{7.124}$$

$$
\times \sin^2 i\, F_{2,1,0} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4}e^2\right)\sin^4 i\, F_{2,1,1}\Bigg] = \bar{n}
$$

$$
-\frac{105 J_4}{16p^4}\bar{n}\, e^2(1-e^2)^{1/2}\left(\frac{3}{7} - \frac{5}{7}\sin^2 i + \frac{15}{8}\sin^4 i\right)
$$

在 σ_l 表示式中，我们取 $n=1$，系数是 $H_{n,k,h,s}$ 的项就可得 J_3 项对卫星轨道根数产生的一阶长周期项，它们是

$$
\left.
\begin{aligned}
a_l &= 0\\
i_l &= \frac{4\operatorname{ctg} i}{3J_2(4-5\sin^2 i)p}(\sin i H_{1,0,0,0} + \sin^3 i\, H_{1,0,0,1})\left(\frac{e}{2}\right)\\
&\quad \times \sin\omega = \frac{J_3 e}{2J_2 p}\cos i \sin\omega\\
e_l &= -\frac{1-e^2}{e}\operatorname{tg} i\, i_l = -\frac{J_3}{2J_2 a}\sin i\sin\omega\\
\Omega_l &= -\frac{4\cos i}{3J_2(4-5\sin^2 i)^2 p}\left[\frac{4+5\sin^2 i}{\sin i}H_{1,0,0,0} + (12\right.\\
&\quad \left. - 5\sin^2 i)\sin i\, H_{1,0,0,1}\right]\left(\frac{e}{2}\right)\cos\omega = -\frac{J_3 e}{2J_2 p}\\
&\quad \times \operatorname{ctg} i\cos\omega\\
\omega_l &= -\frac{4}{3J_2(4-5\sin^2 i)^2 p}\left[\left(\frac{4-5\sin^2 i}{e^2} - \frac{4}{\sin^2 i}\right.\right.\\
&\quad \left. - 1 + 5\sin^2 i\right)\sin i\, H_{1,0,0,0} + \left(\frac{4-5\sin^2 i}{e^2}\right.\\
&\quad \left.\left. - \frac{12}{\sin^2 i} + 17 - 5\sin^2 i\right)\sin^3 i\, H_{1,0,0,1}\right]\left(\frac{e}{2}\right)\\
\cos\omega &= \frac{J_3}{2J_2 p}\left(\frac{e}{\sin i} - \frac{1+e^2}{e}\sin i\right)\cos\omega\\
M_l &= \frac{2(1-e^2)^{3/2}}{3J_2 e(4-5\sin^2 i)p}(H_{1,0,0,0} + \sin^2 i\, H_{1,0,0,1})\\
&\quad \times \sin i\cos\omega\\
&= \frac{J_3(1-e^2)^{3/2}}{2J_2 e p}\sin i\cos\omega.
\end{aligned}
\right\} \quad (7.125)
$$

在 σ_l 表示式中，我们取 $n=2$，系数是 $G_{n,k,h,s}$ 的项就可得 J_4 项对卫星轨道根数产生的一阶长周期项，它们是：

$a_l = 0$

$$
\left.
\begin{aligned}
i_l &= \frac{4\operatorname{ctg} i \sin^4 i}{3J_2(4-5\sin^2 i)p^2}\left(G_{2,1,0,1}+\sin^2 i\, G_{2,1,0,2}\left(\frac{e}{2}\right)^2 \cos 2\omega\right. \\
&= -\frac{5J_4\sin 2i}{32J_2(4-5\sin^2 i)p^2}(6-7\sin^2 i)e^2\cos 2\omega \\
e_l &= \frac{5J_4 e\sin^2 i}{16J_2(4-5\sin^2 i)pa}(6-7\sin^2 i)\cos 2\omega \\
\Omega_l &= \frac{4\cos i}{3J_2(4-5\sin^2 i)^2p^2}[4G_{2,1,0,1}+(8-5\sin^2 i)\sin^4 i \\
&\quad G_{2,1,0,2}]\left(\frac{e}{2}\right)^2\sin 2\omega = -\frac{35J_4e^2\cos i}{4J_2(4-5\sin^2 i)^2p^2}\left(\frac{6}{7}\right. \\
&\quad \left.-2\sin^2 i+\frac{5}{4}\sin^4 i\right)\sin 2\omega \\
\omega_l &= \frac{4}{3J_2(4-5\sin^2 i)^2p^2}\left\{\left[-e^2+\frac{1}{2}(2+3e^2)\sin^2 i\right.\right. \\
&\quad \left.-\frac{5}{8}(2+e^2)\sin^4 i\right]G_{2,1,0,1}+\left[-2e^2+\left(1\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\frac{15}{4}e^2\right)\sin^2 i-\frac{5}{4}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\sin^4 i\right]\sin^2 i\,G_{2,1,0,2}\Big\} \\
&\quad \times\sin 2\omega = \frac{5J_4}{4J_2(4-5\sin^2 i)^2p^2}\left[6e^2-(6+23e^2)\sin^2 i\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{29}{2}+30e^2\right)\sin^4 i-\frac{35}{8}(2+3e^2)\sin^6 i\right] \\
&\quad \times\sin 2\omega \\
M_l &= -\frac{(1-e^2)^{3/2}}{3J_2(4-5\sin^2 i)p^2}(G_{2,1,0,1}+\sin^2 i\,G_{2,1,0,2})\sin^2 i \\
&\quad \times\sin\omega \\
&= \frac{5J_4(1-e^2)^{3/2}\sin^2 i}{16J_2(4-5\sin^2 i)p^2}(6-7\sin^2 i)\sin 2\omega
\end{aligned}
\right\}, \quad (7.126)
$$

由前面研究知道，偶阶带谐系数会引起卫星轨道根数Ω和ω的长期变化．另外，从以后研究可以看到日、月引力摄动也会导致Ω和ω有长期变化．这样我们有：

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= A_0+A_2J_2+A_4J_4+A_6J_6+A_8J_8+\cdots\cdots \\
\frac{d\omega}{dt} &= B_0+B_2J_2+B_4J_4+B_6J_6+B_8J_8+\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\}, \quad (7.127)
$$

这里 A_0 和 B_0 是 J_2^2 项和日月引力摄动项，可取 J_2 的近似值，这样它们都是已知的量． A_2、A_4……和 B_2、B_4……等都是卫星轨道根数 a、e 和 i 的已知函数，对于不同轨道类型尤其是不同轨道倾角是很不一样的．利用二个不同轨道类型的卫星，实测它们的 Ω 和 ω 的变化情况，就能有四个方程解出 J_2、J_4、J_6 和 J_8．利用更多的不同轨道类型特别是不同轨道倾角的卫星建立起来的条件方程可用最小二乘法求出地球引力场的偶阶带谐系数 J_2、J_4、J_6 和 J_8 等．

由(7.103)式知道奇阶带谐系数 J_{2n+1} 是在系数 $H_{n,k,l,u}$ 中．但从(7.113)和(7.114)式可以看出 J_{2n+1} 所产生的 i_l 和 e_l 是以 $\sin(2k+1)\omega$ 即 $\sin\omega$、$\sin 3\omega$，……等形式出现，而从(7.119)和(7.121)式可以看出 J_{2n+1} 所产生的 Ω_l 和 ω_l 是以 $\cos(2k+1)\omega$ 即 $\cos\omega, \cos 3\omega$，……等形式出现．因此我们可以实测卫星轨道根数的长周期变化，采用调和分析方法，分离出仅含 ω 即周期为$\dfrac{2\pi}{\omega_1}$的项构成条件方程：

$$\left.\begin{aligned}
i_l &= C_3J_3 + C_5J_5 + C_7J_7 + C_9J_9 + \cdots \quad (\sin\omega)\\
e_l &= D_3J_3 + D_5J_5 + D_7J_7 + D_9J_9 + \cdots\\
\Omega_l &= E_3J_3 + E_5J_5 + E_7J_7 + E_9J_9 + \cdots \quad (\cos\omega)\\
\omega_l &= F_3J_3 + F_5J_5 + F_7J_7 + F_9J_9 + \cdots
\end{aligned}\right\}. \qquad (7.128)$$

式中 C_3、C_5、……；D_3、D_5、……；E_3、E_5、……和 F_3、F_5、……等都是卫星轨道根数 a、e 和 i 的函数，其中 J_2 已从前面求出．对于不同轨道类型尤其是不同轨道倾角，它们是很不一样的．利用多颗不同轨道类型特别是不同轨道倾角的卫星建立起来的条件方程采用最小二乘法可以求出地球引力场的奇阶带谐系数 J_3、J_5、J_7 和 J_9 等．因此我们可以利用卫星的轨道变化测定地球引力场的情况，这就属于卫星测地工作．国内、外已有不少人在进行这项工作，效果还是比较好的．

§5 地球大气和大气阻力

由于地球的引力，使它周围覆盖着一层浓密的大气。利用探空气球，无线电探空仪和探空火箭可以测量地球大气在不同高度处的密度、温度、压力及其它物理状况和化学组成。人造卫星发射后，人们对地球大气特别是高层大气情况了解就更多了。

地球大气的性质是随着高度而改变的。根据温度的变化情况可以把大气分为五个层次。离开地面平均高度12公里以下的大气称为对流层。在对流层中，大气温度是随高度增加而下降的。从12公里到30公里左右称为平流层，这层大气温度基本上是恒定不变的。从30公里到80公里左右称为中间层，这层大气温度是随高度增加先上升然后再下降。有些地方把平流层和中间层统称为平流层，再把这层划分为下层、中层和上层。从80公里到1000公里左右称为热成层。在热成层中，大气直接受到太阳辐射，它的温度随高度增加而上升。1000公里以上的大气称为外大气层，这层温度随高度增加上升得更快。

人造卫星在大气层中运动，受到大气的阻力，消耗能量，减低速度，最后无法抵御地球的引力而陨落。影响卫星运动的主要因素是大气密度。我们知道，地球大气的密度随着高度的增加衰减很快。在100公里的高处，大气密度还不到海平面处的百万分之一。但是，越往上衰减速度越慢。由人造卫星测量得出，几千公里以上的高空，还存在有大气，可能地球的大气一直延伸到行星际空间。绝大多数卫星运动在热成层中，这里大气成分主要是氮气、氧气和氧原子。因此，可以利用 $\rho(h)=m_1n_1(h)+m_2n_2(h)+m_3n_3(h)$来求相应于地面高度 h 的大气密度ρ。其中m_1、m_2 和m_3 是氮气、氧气和氧原子的分子量和原子量，n_1、n_2 和 n_3 是它们的浓度。当然也可以利用其它方法直接测定大气密度。

根据实际测量结果，地球大气的密度不仅随高度而变，即使是同一高度由于下列原因，差异也是很大的。

（1）地球的自转．白天地球大气受到太阳照射，温度升高密度增加，约在地方平太阳时下午2时达最大．夜晚温度下降密度减少，约在清晨3时为最小．它的变化周期是1天，称为周日变化．

（2）太阳的自转．相对太阳表面不同的地方，地球大气密度也不一样，因此太阳的自转会引起大气密度的变化．太阳表面的自转与其纬度有关，平均约27天自转一圈；因此它的变化周期是27天左右，称为太阳周变化．

（3）太阳的活动．太阳射电辐射和耀斑，使大气的密度发生变化，称为太阳活动变化．

（4）地磁的活动．地球磁场的活动可以改变大气的密度，称为地磁活动变化．

（5）行星际等离子区的作用．行星际等离子区与地球大气层中的电离层相互作用，使得大气密度发生变化．在四月初和十月底密度最大，一月中和七月底密度最小．它的变化周期是半年，称为半年变化．

（6）季节——纬度变化．不同季节和纬度受到太阳的照射不同，另外大气中成分也不一样，这样引起密度变化，称为季节——纬度变化．

由于上述原因，使得大气密度的变化很复杂． 为此专门成立的空间研究委员会(COSPAR)①曾经给出了国际参考大气模型．例如 CIRA②1965 和 CIRA 1972．美国史密生天体物理台(SAO)的加西亚（Jacchia, L. G.）根据实测并利用经验公式也作出了大气模型．采用这些模型可以求出相应某时刻、某位置(经度、纬度和地面高度)的大气密度，它们与真实数值是非常接近的．

前面已经指出：地球大气的密度随着高度的增加衰减是越来越慢的．衰减的程度，可以用一个称为密度标高H的量来量度．我们定义单位高度变化所引起大气密度相对变化的倒数为密度标高．由于密度是减小的，所以加一个负号，使得标高成为正值．即

① Committee on Space Research 的缩写．

② International Reference Atmosphere 的缩写．

有

$$H = -\frac{\rho\,\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\rho} \tag{7.129}$$

式中 h 是地面高度，ρ 是相应于高度 h 的大气密度.

由于上述各种原因，密度标高差异也较大. 表 7-5 列出一种地球大气平均物理条件随地面高度的变化情况.

表 7-5 地球大气平均物理天体随高度的变化

h(公里)	T(开)	$\log\rho$(克/厘米^3)	H(公里)
0	288	−2.91	8.4
20	217	−4.05	6.4
50	273	−5.98	8.1
80	183	−7.72	5.5
100	210	−9.30	6.4
150	780	−11.67	24
200	1200	−12.5	35
250	1400	−13.1	46
300	1500	−13.6	54
400	1500	−14.5	70
500	1600	−15.2	80
700	1600	−16.5	110
1000	1600	−17.8	150
2000	1800	−18.7	500以上

由表 7-5 可以看出在平均物理条件下，大气密度与地面高度之间的关系是呈单调下降的. 当研究人造卫星在大气层中轨道演变情况时，为了方便起见我们可以采用一些简单的函数模型来表示它们之间的数值对应关系. 常用的函数模型有指数、代数和对数三种.

1. 指数函数模型

对于地面高度小于 80 公里的大气层主要是对流层、平流层和中间层. 这层温度有升有降，变化不大，我们可以认为这里的温度 T 基本上是常数. 由理想气体的状态方程 $\frac{pV}{T} = C$，可得这时的

大气密度为 $\rho=\frac{M}{V}=\frac{Mp}{CT}$. 式中 p、V 和M分别是大气的压强、体积和质量、C是常数. 由于T是常数,故有 $d\rho=\frac{M}{CT}dp$. 另外,根据流体静力学平衡方程可得在一定高度范围内大气压强随高度的变化是 $dp=-\rho g dh$,式中 g 是地面重力加速度. 因此有:

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{Mg}{CT}dh. \tag{7.130}$$

利用(7.129)式,可以看到这时的密度标高$H=\frac{CT}{Mg}$,是一个常数. 对(7.130)式积分结果可得:

$$\rho=\rho_0\exp\left(\frac{h_0-h}{H}\right) \tag{7.131}$$

式中 ρ_0 是相应于高度为 h_0 的大气密度. (7.131)式称为大气的指数函数模型. 由于这种模型比较简单而可积,因此它被广泛地用于研究人造卫星轨道理论中.

2. 代数函数模型

对于地面高度在 80 公里到 1000 公里的大气层主要是热成层. 在热成层中,温度随高度增加而升高. 由表 7-5 可以看出,它们近似地成线性关系,这时大气的温度能够写为 $T=T^*h$,其中T^*是常数. 由 $\rho T=\frac{Mp}{C}$、可得 $Td\rho+\rho dT=\frac{M}{C}dp$ 或者是 $T^*\times hd\rho=-\left(\frac{Mg}{C}+T^*\right)\rho dh$. 若令 $n=1+\frac{Mg}{CT^*}$, 这时 n 是常数,可得:

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{n}{h}dh. \tag{7.132}$$

利用(7.129)式,可以看到这时的密度标高$H=\frac{h}{n}$,它随高度增加呈线性地增大. 将(7.132)式积分可得:

$$\rho=\rho_0\left(\frac{h}{h_0}\right)^{-n}, \tag{7.133}$$

式中 n 是常数，它可以根据各个高度相应的标高数值用最小二乘法解出．由表 7-5 所列的标高数值可以计算出 $n = 6.3205$．这时按该模型算出的标高数值与实际数值列于表 7-6．(7.133)式称为大气的代数函数模型．

表 7-6　代数函数模型中标高与实测值比较

h（公里）		150	200	250	300	400	500	700	1000
H（公里）	计算值	23.7	31.6	39.6	47.5	63.3	79.1	110.8	158.2
	实测值	24	35	46	54	70	80	110	150

由表 7-6 可以看出在高度为 150—1000 公里之间（这里是绝大多数人造卫星运动的范围）大气密度采用代数函数模型是比较符合真实情况的．

3. 对数函数模型

对于地面高度在 1000 公里以上的大气层主要属于外大气层，这里的温度随高度增加很快，标高也迅速增大．这说明密度随高度变化更为缓慢，这时可以采用变化形式更慢的对数函数模型，它的形式是：

$$\rho = \rho_0\left[\ln\left(\frac{h}{10}\right)\right]^B, \tag{7.134}$$

式中 $B < 0$ 是一个常数，它也可以根据各个高度相应的标高数值用最小二乘法解出．在人造卫星轨道理论中，由于高度在 1000 公里以上的大气已经十分稀薄，它对卫星运动几乎没有什么影响，因此很少采用．

人造卫星在大气层中运动，设相对于周围大气的速度为 V．如果与卫星运动方向相垂直的它的横截面积是 S，这时在单位时间内卫星所遇到的大气的质量应当是 ρSV 或者说受到大气物质的碰撞动量是 ρSV^2．这就是卫星在大气层中运动时所受到的摩擦阻力．除此以外，还受到由于大气层中旋涡所造成的压强阻力和

冲击波所产生的波阻力。根据空气动力学，我们可以把卫星所受到的大气阻力写为

$$F_{气}=-\frac{1}{2}\lambda C_D S\rho V^2\ , \tag{7.135}$$

式中负号表示大气阻力与卫星运动方向相反。$\lambda\approx\left(1-\frac{\beta}{n_p}\cos i\right)^2$，

β 和 n_p 分别是地球自转和卫星在轨道近地点运动角速度。这是由于大气随地球自转而要作的改正，称为大气旋转因子。由于$\beta\ll n_p$，故有 $\lambda\approx 1$。

在(7.135)式中，C_D 是一个无量纲的常数，它仅与卫星的形状和运动方式有关，称为大气阻力系数。库克 (Cook) 曾经估计了一些轨道高度在 180—500 公里，偏心率在 0—0.2 的一些卫星的阻力系数。对于球形卫星 C_D 在 2.1 和 2.2 之间；对于运动方向与其轴线相倾斜的圆柱形卫星 C_D 在 2.1 和 2.25 之间；对于运动方向与轴线相垂直的平板形卫星 C_D 约是 2.2；对于顶角为 15—20°的圆锥形卫星 C_D 约是 2.10。通常我们可以取 C_D 在 2.1 和 2.2 之间。另外，可以证明对于凸形物体，如果其上面元法向由于物体运动均匀指向空间各个方向的话，则其平均横截面积 $S=\frac{1}{4}A$。这里的 A 是物体表面积。对于球形卫星，这时的横截面积 S 显然是$\frac{\pi}{4}d^2$，其中 d 为卫星的直径。

在许多情况下，卫星的形状是不规则的，有时甚至它的大小，形状和质量都不太清楚，这时我们可以引入一个常数$k=\frac{\lambda C_D S}{m}$，于是(7.135)式变为

$$F_{气}=-\frac{1}{2}mk\rho V^2\ , \tag{7.136}$$

其中系数 k 可以通过实测卫星轨道的变化来确定，因此在以后的研究中就把 k 当作为一个已知的常数。

§6 人造卫星在地球大气层中的运动及其寿命估计

介质阻力对天体运动的影响首先是在研究恩克彗星轨道变化中发现的。人们在观测这颗彗星运动时，发现它围绕太阳的运动周期有缓慢减少的现象。后来恩克假定空间中存在着介质，介质阻力的形式是 V^2r^{-2}，用它讨论了恩克彗星的运动，将结果与观测进行比较还是相当符合的。但是，地球大气密度比空间介质密度要大得多，而且密度随高度衰减又很快。人造卫星在大气层中运动，受到大气阻力的作用十分显著，需要采用一些新的方法来讨论卫星的运动。下面就介绍这些方法以及这时卫星轨道演变情况和如何估计它的寿命。

由于大气阻力的方向基本上与卫星运动的方向相反，因此我们可以将它分解到轨道面上的切线方向，法线方向和轨道面的法向。利用(7.136)式可得大气阻力对卫星产生的加速度在这三个方向上的分量是：

$$U=-\frac{1}{2}k\rho V^2,\qquad N=W=0. \tag{7.137}$$

将(7.137)式代入以 U、N 和W表示的摄动运动方程(5.51)式后可得：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt}=\frac{di}{dt}=0\\
&\frac{d\omega}{dt}=-\frac{k\rho V\sin f}{e}\\
&\frac{dM}{dt}=n+\frac{k\rho V(1-e^3\cos E)\sin f}{e\sqrt{1-e^2}}\\
&\frac{da}{dt}=-ka^2\rho V^3\\
&\frac{de}{dt}=-k\rho V(\cos f+e)
\end{aligned}\right\}. \tag{7.138}$$

由(7.138)的第一式立即可得大气阻力对卫星的轨道根数Ω和i没有影响，这是由于阻力发生在卫星运动的轨道面内，因此它并不改变卫星轨道面在空间中的位置。

利用二体问题公式$r = \frac{p}{1+e\cos f}$，$V^2 = \frac{1}{p}(1+2e\cos f + e^2)$，$\cos E = e + \frac{r}{a}\cos f$，知道它们都是$f$的余弦函数。另外，$\rho$是$r$的函数，自然也是$f$的余弦函数。将它们一起代入(7.138)的第二和第三式时，可得方程的右端是f的正弦函数。由于$dt = \frac{r^2}{\sqrt{p}}df$，当积分变量$t$变换为$f$时，方程右端仍然是$f$的正弦函数。利用富里叶级数正交性，如果将方程对$f$从0到$2\pi$积分结果应当为零。这说明大气阻力对卫星的轨道根数$\omega$和$M$只产生短周期变化，通常我们认为大气阻力所引起的摄动至少是二阶小量，因此在卫星轨道的一阶理论中可以不予考虑。

对于卫星的轨道根数a和e的变化，需要积分(7.138)的第四和第五式。为了积分方便起见，大气密度ρ可以采用指数函数模型。若令$\beta = \frac{1}{H}$，由于$h_0 - h = r_0 - r$，从(7.131)式可得：

$$\rho = \rho_0 \exp[\beta(r_0 - r)], \tag{7.139}$$

我们知道大气阻力主要发生在大气密度较密处，故可取这里的r_0为初始时刻卫星的近地距离，这样式中ρ_0就是相应于r_0处的大气密度，它们可以利用卫星的初始轨道根数a_0和e_0求出。

为了积分(7.138)的第四和第五式，我们可以把方程右端全部表示成偏近点角E的函数形式，同时将积分变量t变换为E。利用二体问题公式$r = a(1-e\cos E)$、$rV^2 = 1 + e\cos E$，$\cos f + e = \frac{a}{r}(1-e^2)\cos E$和$dt = r\sqrt{a}\,dE$，可将(7.138)的第四和第五式变为

$$\frac{da}{dE} = -ka^2\rho(1-e\cos E)^{-1/2}(1+e\cos E)^{3/2} \tag{7.140}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}E}=-ka\rho(1-e\cos E)^{-1/2}(1+e\cos E)^{1/2}(1-e^2)\cos E.$$

(7.141)

其中 ρ 由(7.139)式有

$$\rho=\rho_0\exp[\beta(r_0-a)+\beta ae\cos E]. \tag{7.142}$$

由于卫星轨道偏心率 e 是一个小量,(7.140)和(7.141)右端可按 e 的幂次进行展开为

$$(1-e\cos E)^{-1/2}(1+e\cos E)^{3/2}=1+2e\cos E+\frac{3}{4}e^2(1+\cos 2E)+\frac{1}{4}e^3(\cos 3E+3\cos E)+O(e^4).$$

$$\begin{aligned}&(1-e\cos E)^{-1/2}(1+e\cos E)^{1/2}(1-e^2)\cos E\\&=\cos E+\frac{1}{2}e(1+\cos 2E)+\frac{1}{8}e^2(\cos 3E-5\cos E)\\&\quad+\frac{1}{16}e^3(\cos 4E-4\cos 2E-5)+O(e^4).\end{aligned}$$

将它们和(7.142)式一起代入(7.140)和(7.141)式,对 E 从 0 到 2π 积分,可得人造卫星在大气阻力作用下轨道根数 a 和 e 经过一圈或者说一个运动周期后的增量 Δa 和 Δe. 由于卫星的轨道根数在一圈内变化甚微,积分时方程右端的轨道根数都可以视为常量. 另外,积分中还出现了一个特殊函数:

$$I_n(\beta ae)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(\beta ae\cos E)\cos nE\,\mathrm{d}E \tag{7.143}$$

这里的 $I_n(\beta ae)$ 就是以 βae 为引数的虚变量贝塞尔函数,给出 βae 数值后可以查表得出。

(7.143)式是它的定积分形式,它的幂级数形式是:

$$I_n(x)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!(n+q)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}. \tag{7.144}$$

当 $x>1$ 时,$I_n(x)$ 关于 x 的级数形式(7.144)式收敛很慢,这时可以利用它的渐近展开式:

$$I_n(x)=\frac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m[4n^2-1][4n^2-3^2]\cdots[4n^2-(2m-1)^2]}{m!\,(8x)^m},$$

$$(x>1) \tag{7.145}$$

利用(7.145)式，不难得到：

$$\left.\begin{aligned}
I_0(x)&=\frac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1+\frac{1}{8x}+\frac{9}{128x^2}+\cdots\cdots\right)\\
I_1(x)&=\frac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{3}{8x}-\frac{15}{128x^2}-\cdots\cdots\right)\\
I_2(x)&=\frac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{15}{8x}+\frac{105}{128x^2}-\cdots\cdots\right)\\
I_3(x)&=\frac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{35}{8x}+\frac{945}{128x^2}-\cdots\cdots\right)\\
\frac{I_0(x)}{I_1(x)}&=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\cdots\cdots\\
\frac{I_2(x)}{I_1(x)}&=1-\frac{3}{2x}+\frac{3}{8x^2}-\cdots\cdots\\
\frac{I_3(x)}{I_1(x)}&=1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}-\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{7.146}$$

利用(7.143)式，可得(7.140)和(7.141)式的积分结果是：

$$\Delta a=-2\pi k a^2\rho_0\exp[\beta(r_0-a)][I_0+2eI_1+\frac{3}{4}e^2(I_0+I_2)$$

$$+\frac{1}{4}e^3(3I_1+I_3)+O(e^4I_n)]$$

和

$$\Delta e=-2\pi k a\rho_0\exp[\beta(r_0-a)][I_1+\frac{1}{2}e(I_0+I_2)+\frac{1}{8}e^2$$

$$\times(-5I_1+I_3)+\frac{1}{16}e^3(-5I_0-4I_2+I_4)+O(e^4I_n)].$$

设卫星的运动周期为 T，则有$\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi a^{3/2}}$。卫星的轨道根数

变化率近似可以用时间T内的增量来表示即 $\frac{da}{dt}\approx\frac{\Delta a}{T}$，$\frac{de}{dt}\approx\frac{\Delta e}{T}$. 这样利用这些式子可得卫星在大气阻力作用下，根数a和e的变化率分别是：

$$\frac{da}{dt}=-ka^{1/2}\rho_0\exp[\beta(r_0-a)][I_0+2eI_1+\frac{3}{4}e^2(I_0+I_2)+\frac{1}{4}e^3(3I_1+I_3)+O(e^4I_n)] \tag{7.147}$$

和

$$\frac{de}{dt}=-ka^{-1/2}\rho_0\exp[\beta(r_0-a)]\Big[I_1+\frac{1}{2}e(I_0+I_2)-\frac{1}{8}\times e^2(5I_1-I_3)-\frac{1}{16}e^3(5I_0+4I_2-I_4)+O(e^4I_n)\Big]. \tag{7.148}$$

卫星的近地距离 $r_p=a(1-e)$，远地距离$r_a=a(1+e)$. 由(7.147)和(7.148)式可得卫星在大气阻力作用下，近地距离和远地距离的变化率分别是：

$$\frac{dr_p}{dt}=-ka^{1/2}\rho_0\exp[\beta(r_0-a)]\Big[(I_0-I_1)-e\Big(\frac{3}{2}I_0-2I_1+\frac{1}{2}I_2\Big)+O(e^2I_n)\Big] \tag{7.149}$$

和

$$\frac{dr_a}{dt}=-ka^{1/2}\rho_0\exp[\beta(r_0-a)]\Big[(I_0+I_1)+e\Big(\frac{3}{2}I_0+2I_1+\frac{1}{2}I_2\Big)+O(e^2I_n)\Big]. \tag{7.150}$$

另外，还有

$$\frac{dr_p}{dr_a}=\frac{I_0/I_1-1}{I_0/I_1+1}+O(e). \tag{7.151}$$

(7.147)—(7.150)式可以采用数值方法求积，积分结果得到卫星根数 a、e 以及近地距离 r_p 和远地距离 r_a 的长期变化。其中

I_n 可以根据 βae 的数值查表得出，标高 $H=\frac{1}{\beta}$ 可以采用按不同高度分段取值或者利用 $H=H_0+H_1r_p+H_2r_p^2$ 根据 r_p 的数值算出。

由 (7.147)—(7.151) 式直接可以看出在大气阻力作用下卫星轨道演变的大致情况。

(1) 由于 $\beta ae>0$，由(7.144)式有 $I_n(\beta ae)>0$. 但是 $k=\frac{\lambda C_D S}{m}>0$，$e$ 又是小量，故从(7.147)和(7.148)式得出 $\frac{da}{dt}<0$ 和 $\frac{de}{dt}<0$. 这说明卫星的轨道越来越小而且越变越圆. λC_D 是常数，量 $\frac{S}{m}$ 称为卫星的"面质比". 若卫星的面质比越大，则 k 值也越大，卫星根数 a 和 e 的变小程度也越快。

(2) 人造卫星中多数轨道处于 $a\sim 7000$ 公里，$e\sim 0.1$，近地高度 $h_p\sim 400$ 公里，相应的密度标高 $H\sim 70$ 公里，这时有 $\beta ae\sim 10$. 对于其它类型的轨道，一般也存在有 $\beta ae>1$. 利用(7.144)和 (7.146) 式有 $\frac{I_0}{I_1}=1+\frac{1}{2\beta ae}+\cdots$ 和 $I_0-I_1=I_1\left(\frac{I_0}{I_1}-1\right)=\frac{I_1}{2\beta ae}>0$，代入 (7.149)、(7.150) 和 (7.151) 式后可得 $\frac{dr_p}{dt}<0$，$\frac{dr_a}{dt}<0$ 和 $\frac{dr_p}{dr_a}\approx\frac{1}{4\beta ae}\sim\frac{1}{40}\ll 1$. 这意味着卫星的近地距离和远地距离都在不断地减小，但是前者减小的速度比后者减小的速度要缓慢许多. 因此可以认为卫星的近地距离几乎保持不变. 另外，当卫星的远地距离减小到与近地距离差不多大小即轨道接近于圆轨道时，卫星也陨落在浓密的大气层中了.

人造卫星从进入轨道到在大气层中陨落的时间间隔称为人造卫星的寿命. 人造卫星从某一时刻起算到它陨落为止的时间间隔称为卫星尚能存在的时间. 估计人造卫星的寿命或者存在时间是

人造卫星轨道理论中的一个重要内容，下面就介绍在大气阻力作用下卫星寿命或者存在时间的近似估计方法.

仍然取用一种比较典型的卫星轨道，它们有 $a\sim 7000$ 公里，$e\sim 0.1$。这时 $H\sim 70$ 公里，$\beta ae\sim \frac{1}{e}\sim 10$。利用(7.146)式，有$\frac{I_0-I_1}{I_1}\sim\frac{I_2-I_1}{I_1}\sim\frac{1}{\beta ae}$。于是 $I_1+\frac{e}{2}(I_0+I_2)=(1+e)I_1+\frac{e}{2}(I_0-I_1)+\frac{e}{2}(I_2-I_1)=(1+e)I_1+O\left(\frac{I_0}{\beta a}\right)$。将它代入(7.148)式后可得：

$$\frac{de}{dt}=-ka^{-1/2}\rho_0\exp[\beta(r_0-a)]\left[(1+e)I_1+O\left(\frac{I_0}{\beta a},e^2I_0\right)\right],\tag{7.152}$$

同样有 $e\left(\frac{3}{2}I_0-2I_1+\frac{1}{2}I_2\right)=\frac{3e}{2}(I_0-I_1)+\frac{e}{2}(I_2-I_1)=O\left(\frac{I_0}{\beta a}\right)$，将它代入(7.149)式后可得：

$$\frac{dr_p}{dt}=-ka^{1/2}\rho_0\exp[\beta(r_0-a)]\left[(I_0-I_1)+O\left(\frac{I_0}{\beta a},e^2I_0\right)\right].\tag{7.153}$$

由(7.152)和(7.153)式可得：

$$\frac{dr_p}{de}=\frac{a}{1+e}\left(\frac{I_0}{I_1}-1\right),\tag{7.154}$$

利用(7.146)式，(7.154)式又可化为

$\frac{dr_p}{de}=\frac{1}{2\beta e(1+e)}$或者是 $dr_p=\frac{1}{2\beta}\frac{de}{e(1+e)}$。积分后可得：

$$r_p-r_0=\frac{1}{2\beta}\left(\ln\frac{e}{1+e}-\ln\frac{e_0}{1+e_0}\right),\tag{7.155}$$

式中 r_0 和 e_0 分别是初始时刻卫星的近地距离和偏心率。由于，$r_p=a(1-e)$ 故 $r_p-a=-ae$。利用(7.155)式有 $\exp[\beta\times$

$(r_0 - a)] = \exp[\beta(r_0 - r_p)]\exp[\beta(r_p - a)] = \sqrt{\frac{e_0}{1+e_0}} \times$

$\sqrt{\frac{1+e}{e}}\exp(-\beta ae)$，将它代入(7.152)式后可得：

$$\sqrt{\frac{e}{(1+e)^3}}\frac{de}{dt} = -ka^{-1/2}\rho_0\sqrt{\frac{e_0}{1+e_0}}\exp(-\beta ae)I_1. \qquad (7.156)$$

在(7.156)式中，取 $I_1(\beta ae) = \frac{\exp(\beta ae)}{\sqrt{2\pi\beta ae}}$。进一步，分母中的 a 用 $\frac{1-e_0}{1-e}a_0$ 代替，因为 $r_p - r_0$ 是一个小量，把它们一起代入(7.156)式中去引起的相对误差是 $\frac{1}{\beta a} \sim e^2 \sim 10^{-2}$ 数量级，可以忽略．这样(7.156)式就化为仅含轨道根数 e 的微分方程：

$$(1+e)^{-3/2}(1-e)^{-1}e\frac{de}{dt} = -\frac{k\rho_0}{a_0\sqrt{2\pi\beta}}$$
$$\times(1+e_0)^{-1/2}(1-e_0)^{-1}e_0^{1/2},$$

如果以 $(1+e)^{-3/2}(1-e)^{-1} = 1 - \frac{1}{2}e + O(e^2)$，$(1+e_0)^{-1/2}\times(1-e_0)^{-1} = 1 + \frac{1}{2}e_0 + O(e_0^2)$ 代入，这时就有

$$\left(1 - \frac{1}{2}e\right)ede = -\frac{k\rho_0}{a_0\sqrt{2\pi\beta}}\left(1 + \frac{1}{2}e_0\right)e_0^{1/2}dt. \quad (7.157)$$

当人造卫星轨道偏心率 $e \to 0$ 时，它就进入稠密的大气层而陨落了．因此(7.157)式左边积分限 e 从 e_0 到 0，右边积分限 t 从 0 到 t_L，这里的 t_L 就是卫星的寿命．积分结果为

$$\frac{1}{2}e_0^2 - \frac{1}{6}e_0^3 = \frac{k\rho_0}{a_0\sqrt{2\pi\beta}}\left(1 + \frac{1}{2}e_0\right)e_0^{1/2}t_L,$$

或者是

$$t_L = \frac{\sqrt{2\pi\beta}}{2k\rho_0}a_0e_0^{3/2}\left(1 - \frac{5}{6}e_0\right). \qquad (7.158)$$

我们可以根据每颗卫星的形状，大小和质量确定 k 值，再从公布的卫星初始根数 a_0 和 e_0 确定 $r_0=a_0(1-e_0)$ 以及相应的 ρ_0 和 $\beta=\frac{1}{H}$ 利用(7.158)式确定它们的寿命。

在许多情况下，卫星的 k 值很难确定或者根本不知道。这时我们只有通过观测确定它的运动周期及其变率来估计卫星的寿命。

由于 $I_0+2eI_1=(1+2e)I_0+2e(I_1-I_0)=(1+2e)I_0+O\left(\frac{I_0}{\beta a}\right)$。故由(7.147)式有：

$$\frac{da}{dt}=-ka^{1/2}\rho_0\exp[\beta(r_0-a)]\left[(1+2e)I_0+O\left(\frac{I_0}{\beta a},e^2I_0\right)\right]. \tag{7.159}$$

同样取 $I_0=\frac{\exp(\beta ae)}{\sqrt{2\pi\beta ae}}$ 并利用 $\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\frac{3}{2a}\frac{da}{dt}$，由(7.159)式可得：

$$\left(\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right)_{t=t_0}=-\frac{3k\rho_0}{2a_0\sqrt{2\pi\beta e_0}}(1+2e_0), \tag{7.160}$$

式中 T 和 $\frac{dT}{dt}$ 是卫星的运动周期及其变率。将(7.160)式代入(7.158)式后可得卫星在大气阻力作用下的寿命：

$$t_L=-\frac{3}{4}e_0\left(1+\frac{7}{6}e_0\right)\Big/\left(\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right)_{t=t_0}. \tag{7.161}$$

(7.161)式的相对误差仍是 $\frac{1}{\beta a}\sim e^2\sim10^{-2}$。这样我们就可以利用卫星初始或者某时刻的根数 a_0、e_0 以及周期变率 $\dot{T}_0$，由(7.161)式来估计卫星的寿命或者尚能存在的时间。

如果(7.157)式积分时，左边积分限 e 从 e_0 到 e，右边积分限 t 从 0 到 t，则有

$$\frac{1}{2}e^2\left(1-\frac{1}{3}e\right)-\frac{1}{2}e_0^2\left(1-\frac{1}{3}e_0\right)=-\frac{k\rho_0}{a_0\sqrt{2\pi\beta}}\left(1+\frac{1}{2}e_0\right)e_0^{1/2}t \tag{7.162}$$

将(7.158)式代入(7.162)式右端，可得

$$e^2\left(1-\frac{1}{3}e\right)=e_0^2\left(1-\frac{1}{3}e_0\right)\left(1-\frac{t}{t_L}\right)$$ 或者近似写为

$$e=e_0\sqrt{1-\frac{t}{t_L}}. \tag{7.163}$$

若取 $a(1-e)\approx a_0(1-e_0)$，则由(7.163)式可得：

$$a=a_0\left[1-e_0\left(1-\sqrt{1-\frac{t}{t_L}}\right)\right]. \tag{7.164}$$

利用(7.164)式不难得出：

$$T=T_0\left[1-\frac{3}{2}e_0\left(1-\sqrt{1-\frac{t}{t_L}}\right)\right]. \tag{7.165}$$

我们利用(7.161)式估计出卫星的寿命 t_L 后就可以由(7.163)、(7.164)和(7.165)式预推以后某时刻 t 时的卫星根数 a、e 和 T。如果 t_L 比较大而预推的时间不太长，例如我国第一颗人造卫星的寿命约在100年左右而预推1年内卫星根数时，(7.163)、(7.164)和(7.165)式又可以简化为

$$\left.\begin{aligned}e&=e_0\left(1-\frac{t}{2t_L}\right)\\a&=a_0\left(1-\frac{e_0t}{2t_L}\right)\\T&=T_0\left(1-\frac{3e_0t}{4t_L}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{7.166}$$

§7 光压作用对人造卫星运动的影响

光线照射在物体表面，对它产生一种压力，这种现象称为光压作用。1899年俄国物理学家列别捷夫(Лебедев, П. Н.)首先在实验中发现了光压作用并测量了它。后来人们还利用光压作用成功地解释了彗星运动中的异常现象和一部分彗星彗尾的形成。

光压作用可以从量子理论来解释：当光粒子流照射到物体表面上被反射而改变运动方向时，它们的动量发生变化使得对物体表面产生了压力．我们知道每个光(粒)子的能量是 $h\nu$，动量是 $\frac{h\nu}{c}$．其中 h 是普朗克常数，ν 是光的频率，c 是光速．设 S_0 表示与太阳光线垂直的一平方厘米面积每分钟所接受到的太阳的总辐射能量，则相应的光粒子数 $N=\frac{S_0}{h\nu}$，总动量应为 $N\frac{h\nu}{c}=\frac{S_0}{c}$．如果是绝对黑体即它的表面吸收了所有的光子，则单位时间(每分钟)内光粒子流总动量的变化即光压力为 $\frac{S_0}{c}$；如果是理想镜面即它的表面反射了所有的光子，则光压力应为 $\frac{2S_0}{c}$．在通常情况下，一部分光子被吸收，一部分光子被反射，这时光压力应为 $(1+R)\frac{S_0}{c}$．这里的 R 称为反射系数，它与物体表面材料、形状和光滑程度有关，自然有 $0<R<1$．对于完全漫反射，$R=0.44$，通常可以取 R 在 0 到 0.44 之间．

设人造卫星的质量为 m，与太阳光线垂直的横截面积为 S，则太阳光的光压作用对人造卫星所产生的摄动加速度是：

$$\boldsymbol{F}_{\odot}=-F_{\odot}\boldsymbol{L}_{\odot}, \tag{7.167}$$

其中 $F_{\odot}=\frac{S}{m}(1+R)\frac{S_0}{c}$ 是一个常数．由于人造卫星应当位于在地球轨道附近，因此这里的 S_0 就是太阳常数，它等于 1.96 卡．$\boldsymbol{L}_{\odot}$ 是卫星到太阳方向的单位向量，它近似可以用地心到太阳方向的单位向量来代替．由图 7-2 可以看出，在地心赤道直角坐标系中有：

$$\boldsymbol{L}_{\odot}=(\cos l_{\odot},\cos\varepsilon\sin l_{\odot},\sin\varepsilon\sin l_{\odot}), \tag{7.168}$$

其中 $l_{\odot}$ 是太阳的黄经，ε 是黄赤交角．

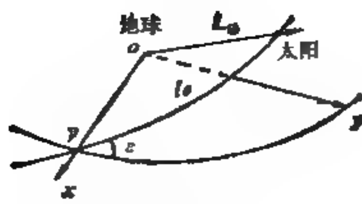


图 7-2

由于 $F_{\nu} \sim \frac{S}{m}$，故从 (7.167)式可以看出光压力的大小直接与卫星的面质比有关。如果卫星的质量以一千克为单位，横截面积以一平方米为单位，则我国第一颗人造卫星的面质比约是 0.0045，太阳光压对卫星的作用力是微不足道的。但是对于某些卫星，它们的面质比很大，这时光压作用就十分显著。例如美国发射的"先锋 1 号"(Vanguard-1)面质比是 0.01425，"回声 1 号"(Echo-1)面质比达 10.2。光压作用对人造卫星运动的影响就是由于这二颗卫星的运动出现异常才引起注意的。1960 年莫生(Musen)首先研究了光压作用对人造卫星运动的影响，后来考斯克拉(Koskela)，古在由秀，波利亚霍瓦(Полякова)，拉勒(Lala) 和史密斯(Smith)等都讨论了这个问题.下面就介绍光压作用对人造卫星运动的影响.

设 $\boldsymbol{S}_0$、$\boldsymbol{T}_0$ 和 $\boldsymbol{W}_0$ 是卫星在轨道面内径向，横向和轨道面法向上的单位向量。由图 7-3 可以看出它们在地心赤道直角坐标系中表示式是:



图 7-3

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_s &= \begin{pmatrix} \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i \\ \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i \\ \sin u\sin i \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{T}_s &= \begin{pmatrix} -\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i \\ -\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i \\ \cos u\sin i \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{W}_s &= \begin{pmatrix} \sin\Omega\sin i \\ -\cos\Omega\sin i \\ \cos i \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}. \tag{7.169}$$

其中纬度角 $u = \omega + f$.

利用(7.168)和(7.169)式,可以将光压作用对卫星产生的摄动加速度(7.167)式分解到卫星轨道面内径向，横向和轨道面法向，结果是:

$$S = \boldsymbol{F}_\odot \cdot \boldsymbol{S}_s = -F_\odot[\cos l_\odot(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i) + \cos\varepsilon\sin l_\odot(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i) + \sin\varepsilon\sin l_\odot\sin u\sin i]. \tag{7.170}$$

$T = \boldsymbol{F}_\odot \cdot \boldsymbol{T}_s$, 由于 $\boldsymbol{T}_s$ 仅是 $\boldsymbol{S}_s$中的 u 改为$\frac{\pi}{2} + u$ 故 T 的表示式只要将(7.170)式中的 u 改为$\frac{\pi}{2} + u$即可。

$$W = \boldsymbol{F}_\odot \cdot \boldsymbol{W}_s = -F_\odot(\cos l_\odot\sin\Omega\sin i - \cos\varepsilon\sin l_\odot\cos\Omega\sin i + \sin\varepsilon\sin l_\odot\cos i). \tag{7.171}$$

与讨论人造卫星在大气层中运动一样可以认为在一个卫星运动周期内，它的轨道根数是常量，在积分一圈时可以提到积分号外,这时显含时间 t 的仅仅是它的真近点角 f. 由于
$\cos u = \cos\omega\cos f - \sin\omega\sin f$, $\sin u = \sin\omega\cos f + \cos\omega\sin f$, 则(7.170)式右端方括号内 $\cos f$ 的系数为

$$\cos l_\odot(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i) + \cos\varepsilon\sin l_\odot(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i) + \sin\varepsilon\sin l_\odot\sin\omega\sin i$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos(\omega + \Omega) + \cos(\omega - \Omega) + \cos i\,[\cos(\omega + \Omega) - \cos$$

$$\times(\omega - \Omega)]\}\cos l_{\odot} + \frac{1}{2}\{\sin(\omega + \Omega) - \sin(\omega - \Omega) + \cos i$$

$$\times[\sin(\omega + \Omega) + \sin(\omega - \Omega)]\}\cos\varepsilon \sin l_{\odot}$$

$$- \frac{1}{2}[\cos(\omega + l_{\odot}) - \cos(\omega - l_{\odot})]\sin i \sin\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}[(1 + \cos i)\cos(\omega + \Omega)\cos l_{\odot} + (1 - \cos i)\cos(\omega - \Omega)$$

$$\times\cos l_{\odot}] + \frac{1}{2}[(1 + \cos i)\sin(\omega + \Omega) - (1 - \cos i)\sin$$

$$\times(\omega - \Omega)]\cos\varepsilon \sin l_{\odot} - \frac{1}{2}[\cos(\omega + l_{\odot}) - \cos(\omega - l_{\odot})]$$

$$\times \sin i \sin\varepsilon = \frac{1}{4}\{(1 + \cos i)[\cos(\omega + \Omega + l_{\odot}) + \cos(\omega$$

$$+\Omega - l_{\odot})] + (1 - \cos i)[\cos(\omega - \Omega + l_{\odot}) + \cos(\omega - \Omega$$

$$- l_{\odot})]\} + \frac{1}{4}\{-(1 + \cos i)[\cos(\omega + \Omega + l_{\odot}) - \cos(\omega$$

$$+\Omega - l_{\odot})] + (1 - \cos i)[\cos(\omega - \Omega + l_{\odot}) - \cos(\omega - \Omega$$

$$- l_{\odot})]\}\cos\varepsilon - \frac{1}{2}[\cos(\omega + l_{\odot}) - \cos(\omega - l_{\odot})]\sin i \sin\varepsilon$$

$$= \frac{1}{4}\{(1 + \cos i)(1 - \cos\varepsilon)\cos(\omega + \Omega + l_{\odot}) + (1 + \cos i)$$

$$\times(1 + \cos\varepsilon)\cos(\omega + \Omega - l_{\odot}) + (1 - \cos i)(1 + \cos\varepsilon)\cos$$

$$\times(\omega - \Omega + l_{\odot}) + (1 - \cos i)(1 - \cos\varepsilon)\cos(\omega - \Omega - l_{\odot})$$

$$+ 2[\cos(\omega - l_{\odot}) - \cos(\omega + l_{\odot})]\sin i \sin\varepsilon。$$

将它与 $F_{\odot}$ 的乘积记为 A，即令

$$A = \frac{F_{\odot}}{4}\{(1 + \cos i)(1 - \cos\varepsilon)\cos(\omega + \Omega + l_{\odot}) + (1$$

$$+ \cos i)(1 + \cos\varepsilon)\cos(\omega + \Omega - l_{\odot}) + (1 - \cos i)(1$$

$$+ \cos\varepsilon)\cos(\omega - \Omega + l_{\odot}) + (1 - \cos i)(1 - \cos\varepsilon)$$

$$\times\cos(\omega - \Omega - l_{\odot}) + 2[\cos(\omega - l_{\odot}) - \cos(\omega + l_{\odot})]$$

$$\times \sin i \sin \varepsilon\}。 \tag{7.172}$$

由于 $\cos u$ 中 $\cos f$ 的系数是 $\cos\omega$，$\sin f$ 的系数是 $-\sin\omega$；$\sin u$ 中 $\cos f$ 的系数是 $\sin\omega$，$\sin f$ 的系数是 $\cos\omega$，故只要将 $\cos f$ 系数中的 ω 换为 $\frac{\pi}{2}+\omega$ 就得 $\sin f$ 的系数，因此由 (7.171) 式，可令：

$$\begin{aligned}B = -\frac{F_\odot}{4}\{&(1+\cos i)(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+l_\odot)+(1+\cos i)\\&\times(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-l_\odot)+(1-\cos i)(1+\cos\varepsilon)\\&\times\sin(\omega-\Omega+l_\odot)+(1-\cos i)(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega\\&-l_\odot)+2[\sin(\omega-l_\odot)-\sin(\omega+l_\odot)]\sin i\sin\varepsilon\}。\end{aligned} \tag{7.173}$$

这时(7.170)式化为

$$S = -(A\cos f + B\sin f)。 \tag{7.174}$$

其中系数 A 和 B 分别是(7.172)和(7.173)式，它们在一圈内积分时可以视为常数。

如果在 (7.170) 式中将 u 换为 $\frac{\pi}{2}+u$ 或者将 f 换为 $\frac{\pi}{2}+f$，则 S 就变成了 T，故由(7.174)式可得：

$$T = A\sin f - B\cos f。 \tag{7.175}$$

另外，我们令：

$$\begin{aligned}C = \frac{F_\odot}{2}[&\sin i(1+\cos\varepsilon)\sin(\Omega-l_\odot)+\sin i(1-\cos\varepsilon)\\&\times\sin(\Omega+l_\odot)+2\cos i\sin\varepsilon\sin l_\odot],\end{aligned} \tag{7.176}$$

则由(7.171)式可得：

$$W = -C, \tag{7.177}$$

其中 C 在一圈内积分时也可以视为常数。

将(7.174)、(7.175)和(7.177)式代入以 S、T 和 W 表示的摄动运动方程(5.43) 式；为积分方便起见用偏近点角 E 来代替积分变量 t，并利用二体问题公式：

$$r = a(1 - e\cos E), \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E} = \frac{r}{na},$$

$$r\cos f = a(\cos E - e), \ \ r\sin f = a\sqrt{1 - e^2}\sin E,$$

可得在光压作用下，卫星根数的变化是：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}E} &= 2a^3(A\sin E - B\sqrt{1-e^2}\cos E) \\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}E} &= \frac{1}{2}a^2(1-e^2)^{1/2}[A(1-e^2)^{1/2}\sin 2E - B(3 \\
&\quad -4e\cos E + \cos 2E)] \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}E} &= \frac{1}{4}a^2(1-e^2)^{-1/2}C\{[6e - 4(1+e^2)\cos E \\
&\quad +2e\cos 2E]\cos\omega + (1-e^2)^{1/2}[4\sin E \\
&\quad -2e\sin 2E]\sin\omega\} \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}E} &= \frac{1}{4}a^2(1-e^2)^{-1/2}\csc i\, C\{(1-e^2)^{1/2}[-4\sin E \\
&\quad +2e\sin 2E]\cos\omega + [6e - 4(1+e^2)\cos E \\
&\quad +2e\cos 2E]\sin\omega\} \\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E} &= -\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}E} + \frac{1}{2}a^2e^{-1}\{A(1-e^2)^{1/2}(3-2e \\
&\quad \times\cos E - \cos 2E) + B(2e\sin E - \sin 2E)\} \\
\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}E} &= \frac{1}{2}a^2e^{-1}\{A[-3(1+e^2) + 2e(3+e^2)\cos E \\
&\quad +(1-3e^2)\cos 2E] + B(1-e^2)^{1/2}[2e\sin E \\
&\quad +(1-2e^2)\sin 2E]\}
\end{aligned}\right\} \quad (7.178)$$

(7.178) 式对 E 积分时将会出现二种情形：一种是卫星的轨道高度比较大，卫星不会进入地影而始终受到光压作用，这时 E 从 0 积分到 2π；另一种是卫星的轨道高度比较小，卫星有可能进入地影而不受光压作用，这时 E 从 E_1 积分到 E_2，E_1 和 E_2 分别是出地影和进地影时卫星的偏近点角。

如果卫星不会进入地影，则(7.178)式积分结果是：

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta a = 0 \\
&\Delta e = -3\pi a^2(1-e^2)^{1/2}B \\
&\Delta i = 3\pi a^2 e(1-e^2)^{-1/2}C\cos\omega \\
&\Delta\Omega = 3\pi a^2 e(1-e^2)^{-1/2}C\sin\omega\csc i \\
&\Delta\omega = -\cos i\Delta\Omega + 3\pi a^2 e^{-1}(1-e^2)^{1/2}A \\
&\Delta M = -3\pi a^2 e^{-1}(1+e^2)A
\end{aligned}\right\}. \tag{7.179}$$

与人造卫星在大气层中运动一样可以认为在光压作用下卫星根数的变化率为$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\Delta\sigma}{T}=\frac{\Delta\sigma}{2\pi a^{3/2}}$，相应根数的变化为 $\delta\sigma=\int\frac{d\sigma}{dt}dt=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\Delta\sigma}{a^{3/2}}dt$。在通常情况下，大气阻力至少相当于 J_2，根据卫星在地球引力场和大气层中的运动理论知道卫星根数 a、e 和 i 没有一阶长期变化，而ω和Ω有一阶长期变化，因此(7.179)式在对 t 积分时可以把 a、e 和 i 视为常量仅 A、B、C 和ω是 t 的函数。由(7.176)式有：

$$\begin{aligned}
C\cos\omega = \frac{F_\odot}{4}\{&\sin i(1+\cos\varepsilon)[\sin(\omega+\Omega-l_\odot)-\sin(\omega-\Omega \\
&+l_\odot)]+\sin i(1-\cos\varepsilon)[\sin(\omega+\Omega+l_\odot)-\sin \\
&\times(\omega-\Omega-l_\odot)]+2\cos i\sin\varepsilon[\sin(\omega+l_\odot)-\sin \\
&\times(\omega-l_\odot)]\}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
C\sin\omega = -\frac{F_\odot}{4}\{&\sin i(1+\cos\varepsilon)[\cos(\omega+\Omega-l_\odot)-\cos(\omega \\
&-\Omega+l_\odot)]+\sin i(1-\cos\varepsilon)[\cos(\omega+\Omega+l_\odot) \\
&-\cos(\omega-\Omega-l_\odot)]+2\cos i\sin\varepsilon[\cos(\omega+l_\odot) \\
&-\cos(\omega-l_\odot)]\}.
\end{aligned}$$

将它们一起代入(7.179)式，对 t 积分结果可得卫星的根数是：

$$\sigma=\sigma_0+\delta\sigma, \tag{7.180}$$

其中 σ_0 是卫星的初值，$\delta\sigma$ 是卫星根数 σ 在光压作用下引起的变

化，它们是：

$$\delta a = 0$$

$$\delta e = -\frac{3}{2}F_{\odot}p^{1/2}\Big[\frac{1}{\omega_1+\Omega_1+l_1}\cos^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\times\cos(\omega+\Omega+l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1-\Omega_1-l_1}\times\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cos(\omega-\Omega-l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1+\Omega_1-l_1}\cos^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos(\omega+\Omega-l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1-\Omega_1+l_1}\sin^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\times\cos(\omega-\Omega+l_{\odot})-\frac{1}{2(\omega_1+l_1)}\times\sin i\sin\varepsilon\cos(\omega+l_{\odot})+\frac{1}{2(\omega_1-l_1)}\times\sin i\sin\varepsilon\cos(\omega-l_{\odot})\Big]$$

$$\delta i = -\frac{3}{4}F_{\odot}aep^{-1/2}\Big[\frac{1}{\omega_1+\Omega_1+l_1}\sin i\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\times\cos(\omega+\Omega+l_{\odot})-\frac{1}{\omega_1-\Omega_1-l_1}\sin i\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cos(\omega-\Omega-l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1+\Omega_1-l_1}\sin i\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\cos(\omega+\Omega-l_{\odot})-\frac{1}{\omega_1-\Omega_1+l_1}\sin i\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\times\cos(\omega-\Omega+l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1+l_1}\cos i\times\sin\varepsilon\cos(\omega+l_{\odot})-\frac{1}{\omega_1-l_1}\cos i\times\sin\varepsilon\cos(\omega-l_{\odot})\Big].$$

$$\delta\Omega = -\frac{3}{4}F_{\odot}aep^{-1/2}\Big[\frac{1}{\omega_1+\Omega_1+l_1}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sin(\omega+\Omega+l_{\odot})-\frac{1}{\omega_1-\Omega_1-l_1}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\\
&\times\sin(\omega-\Omega-l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1+\Omega_1-l_1}\\
&\times\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega+\Omega-l_{\odot})-\frac{1}{\omega_1-\Omega_1+l_1}\\
&\times\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega-\Omega+l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1+l_1}\\
&\times\operatorname{ctg} i\sin\varepsilon\sin(\omega+l_{\odot})-\frac{1}{\omega_1-l_1}\operatorname{ctg} i\\
&\times\sin\varepsilon\sin(\omega-l_{\odot})\Bigg]\\
\delta\omega=&-\cos i\,\delta\Omega+\frac{3}{2}F_{\odot}e^{-1}p^{1/2}\Bigg[\frac{1}{\omega_1+\Omega_1+l_1}\cos^2\frac{i}{2}\\
&\times\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega+\Omega+l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1-\Omega_1-l_1}\\
&\times\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega-\Omega-l_{\odot})\\
&+\frac{1}{\omega_1+\Omega_1-l_1}\cos^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega+\Omega\\
&-l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1-\Omega_1+l_1}\sin^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega\\
&-\Omega+l_{\odot})-\frac{1}{2(\omega_1+l_1)}\sin i\sin\varepsilon\sin(\omega\\
&+l_{\odot})+\frac{1}{2(\omega_1-l_1)}\sin i\sin\varepsilon\sin(\omega\\
&-l_{\odot})\Bigg]\\
\delta M=&-\frac{3}{2}F_{\odot}a^{1/2}e^{-1}(1+e^2)\Bigg[\frac{1}{\omega_1+\Omega_1+l_1}\cos^2\frac{i}{2}\\
&\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega+\Omega+l_{\odot})+\frac{1}{\omega_1-\Omega_1-l_1}
\end{aligned}
\right\}
\quad (7.181)
$$

$$
\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega-\Omega-l_\odot)
+\frac{1}{\omega_1+\Omega_1-l_1}\cos^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega+\Omega
-l_\odot)+\frac{1}{\omega_1-\Omega_1+l_1}\sin^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(\omega-\Omega
+l_\odot)-\frac{1}{2(\omega_1+l_1)}\sin i\sin\varepsilon\sin(\omega+l_\odot)
+\frac{1}{2(\omega_1-l_1)}\sin i\sin\varepsilon\sin(\omega-l_\odot)\Bigg]
$$

其中 $p=a(1-e^2)$，$\omega=\omega_0+\omega_1(t-t_0)$，$\Omega=\Omega_0+\Omega_1(t-t_0)$，$l_\odot=l_0+l_1(t-t_0)$；$\omega_1=\frac{3}{4}\frac{J_2n}{p^2}(4-5\sin^2 i)$，$\Omega_1=-\frac{3}{2}\frac{J_2n}{p^2}\cos i$，$l_1=0^\circ\!.98565$/天，它们分别是地球形状所引起的卫星根数$\omega$和$\Omega$的一阶长期摄动以及太阳黄经的变化率；$l_0$ 为 t_0 时刻太阳的平黄经，它可以从天文年历中查出。

$F_\odot=\frac{S}{m}(1+R)\frac{S_0}{C}$. 若取 $R=0.44$，面质比用米^2/千克来表示的话，则 $F_\odot=7\times10^{-7}\frac{S}{m}$米/秒^2. 而地球引力场中心引力加速度～10米/秒^2，J_2 项所产生的摄动加速度～10^{-5} 米/秒^2，故有$F_\odot\sim0.1\frac{S}{m}J_2^2$. 通常情况下，卫星的面质比小于 10^{-2}，这时 $F_\odot<J_2^3$ 即光压作用至少是三阶小量，可以不予考虑. 对于有些卫星，例如"回声1号"，"帕吉斯1号"(PAGEOS－1)① 等，它们的面质比特别大，达10左右，这时 $F_\odot\sim J_2^2$ 即光压作用可达二阶小量. 从(7.181)式可以看出，这时光压作用会使卫星除轨道半长径外的其

① Passive Geodetic Earth Orbiting Satellites 的缩写。

余根数产生一阶长周期变化。由于卫星偏心率的长周期变化，导致卫星的近地点高度在某段时间内大大地降低，结果所受到的大气阻力增加从而大大地缩短了卫星的寿命。

对于多数卫星，由于它的高度有限，如图 7-4 所示，当卫星与太阳的地心张角大于 ϕ 时，卫星将会进入地影而不受光压作用，这时需要考虑地影屏遮问题。

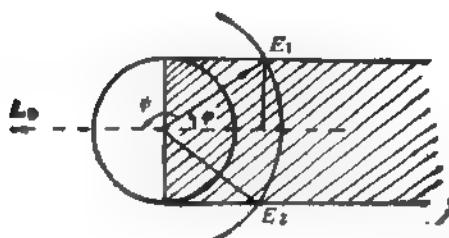


图 7-4

如果卫星进入地影时，(7.178)式的积分结果是：

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta a &= -2a^3\{A(\cos E_2 - \cos E_1) + B\sqrt{1-e^2} \\
&\qquad \times(\sin E_2 - \sin E_1)\} \\
\Delta e &= -\frac{1}{4}a^2\sqrt{1-e^2}\{A\sqrt{1-e^2}(\cos 2E_2 \\
&\qquad - \cos 2E_1) + B[6(E_2 - E_1) - 8e(\sin E_2 \\
&\qquad - \sin E_1) + (\sin 2E_2 - \sin 2E_1)]\} \\
\Delta i &= \frac{1}{8}a^2(1-e^2)^{-1/2}C\{12e(E_2 - E_1) - 8(1 \\
&\qquad + e^2)(\sin E_2 - \sin E_1) + 2e(\sin 2E_2 \\
&\qquad - \sin 2E_1)]\cos\omega - \sqrt{1-e^2}[8(\cos E_2 \\
&\qquad - \cos E_1) - 2e(\cos 2E_2 - \cos 2E_1)]\sin\omega\},
\end{aligned}\right|
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta\Omega = {} & \frac{1}{8}e^2(1-e^2)^{-1/2}\csc i\,C\{\sqrt{1-e^2}\,[8(\cos E_2 \\
& -\cos E_1)-2e(\cos 2E_2-\cos 2E_1)]\cos\omega \\
& +[12e(E_2-E_1)-8(1+e^2)(\sin E_2 \\
& -\sin E_1)+2e(\sin 2E_2-\sin 2E_1)]\sin\omega\} \\
\Delta\omega = {} & -\cos i\,\Delta\Omega+\frac{1}{4}e^2e^{-1}\{A\sqrt{1-e^2}\,[6(E_2 \\
& -E_1)-4e(\sin E_2-\sin E_1)-(\sin 2E_2 \\
& -\sin 2E_1)-B[4e(\cos E_2-\cos E_1) \\
& -(\cos 2E_2-\cos 2E_1)]\} \\
\Delta M = {} & \frac{1}{4}e^2e^{-1}\{A[-6(1+e^2)(E_2-E_1)+4e \\
& \times(3+e^2)(\sin E_2-\sin E_1)+(1-3e^2) \\
& \times(\sin 2E_2-\sin 2E_1)]-B\sqrt{1-e^2}\,[4e \\
& \times(\cos E_2-\cos E_1)+(1-2e^2)(\cos 2E_2 \\
& -\cos 2E_1)]\}
\end{aligned}\right\}. \tag{7.182}
$$

式中 E_1 和 E_2 分别是卫星出地影和进地影时的偏近点角．若取 $E_1=0$，$E_2=2\pi$ 即卫星不会进入地影时，则(7.182)式就退化到(7.179)式．下面介绍如何确定 E_1 和 E_2 的值．

由图 7-4 可以看出，当卫星进出地影时有：

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\phi &= \frac{1}{r} \\
\cos\phi &= \boldsymbol{L}_\odot\cdot\boldsymbol{S}_0
\end{aligned}\right\}. \tag{7.183}
$$

利用(7.167)式，有 $S=\boldsymbol{F}_\odot\cdot\boldsymbol{S}_0=-F_\odot\boldsymbol{L}_\odot\cdot\boldsymbol{S}_0$，将它代入(7.183)的第二式并利用(7.174)式可得：

$$
\cos\phi=\frac{1}{F_\odot}(A\cos f+B\sin f)=K\sin(\theta+f) \tag{7.184}
$$

其中 $K=\frac{1}{F_\odot}(A^2+B^2)^{1/2}>0,\ \theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{A}{B}$． 由(7.183)式显然

可得地影方程是$K^2\sin^2(\theta+f)+\frac{1}{p^2}(1+e\cos f)^2=1$，或者是

$$K^2\sin^2(\theta+f)=1-\frac{1}{p^2}(1+e\cos f)^2 \qquad (7.185)$$

我们根据卫星的根数i、ω和Ω以及从天文年历查出此时太阳的平黄经，由(7.172)和(7.173)式求出A和B或者K和θ。卫星根数a和e是已知的，则(7.185)式是关于f的超越方程，可以采用迭代法来求解。由于$\cos\phi=K\sin(\theta+f)<0$，但是$K>0$，故要选取$f$使得$\sin(\theta+f)<0$。卫星根数$e$是小量，在(7.185)式中置$e=0$有$\sin(\theta+f^{(0)})=-\frac{\sqrt{a^2-1}}{Ka}$，分别用$f^{(0)}=2\pi-\theta-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{Ka}$和$f^{(0)}=\pi-\theta+\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{Ka}$作为初值，由(7.185)式可以解出$f_1$和$f_2$，然后利用$\mathrm{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\mathrm{tg}\frac{E}{2}$再求出相应的$E_1$和$E_2$。它们就是卫星出地影和进地影时的偏近点角。在一段时间内卫星的根数和太阳的黄经变化较小，故由地影方程(7.185)式解出的E_1和E_2变化也很小。当暂且认为它们几乎不变时，利用$\delta\sigma=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\Delta\sigma}{a^{3/2}}dt$由(7.182)式求出卫星在光压作用下所有的根数都存在着长周期变化。对于面质比在10米^2/千克左右的卫星，它们就是一阶长周期项。由于卫星轨道半长径a有长周期变化从而使它的运动周期及其变率不是完全呈单调变化而出现了忽增忽减的异常现象。另外，由于卫星根数a和e都有长周期变化，它们可能造成卫星的近地点高度大大下降，结果所受到的大气阻力增加从而大大地缩短了卫星的寿命。

从前面讨论可以看到，如果卫星会进入地影，这时与大气阻力和引力作用不同光压作用不是一个连续函数，计算起来相当麻烦。

为此有人采用地影函数，把它变成一种连续函数来解决地影屏遮问题。

1963 年法国的弗拉兹-梅洛（Ferraz-Mello）首先将地影函数：

$$\Psi = \begin{cases} 0 & -\varphi < \lambda < \varphi, \\ 1 & -\pi < \lambda < -\varphi, \varphi < \lambda < \pi, \end{cases} \tag{7.186}$$

展为角度 λ 的三角级数。其中 λ 是与太阳方向相反的方向和卫星方向的地心张角，由图 7-4 可以看出 φ 是反太阳方向与卫星出地影方向的地心张角。这时

$$\Psi = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\lambda. \tag{7.187}$$

其中 $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Psi \cos k\lambda d\lambda$。将积分区间$[0,\pi]$划分为$[0,\varphi]$和$[\varphi,\pi]$，在第一区间中 $\Psi = 0$，第二区间中 $\Psi = 1$，于是有 $a_0 = \frac{2}{\pi}(\pi - \varphi)$，$a_k = -\frac{2}{k\pi}\sin k\varphi$，将它们代入（7.187）式后，可得地影函数是：

$$\Psi = 1 - \frac{\varphi}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin k\varphi \cos k\lambda. \tag{7.188}$$

其中 $\varphi = \sin^{-1}\frac{1}{r}$。这时地影函数就由不连续函数形式（7.186）式变为连续函数形式(7.188)式。把(7.188)式加到(7.178)式中再对 E 从 0 到 2π 积分就可以得到在卫星会进入地影时，在光压作用下卫星根数的变化情况。

1969 年拉勒和塞纳尔(Sehnal)将地影函数展为 $\cos\lambda$ 的幂级数，

$$\Psi = \frac{1}{2}\left\{1 + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_{ik} \sin^i\varphi \cos^k\lambda\right\} \tag{7.189}$$

其中 B_{ik} 是常系数.

1974 年苏联的瓦什科维亚克(Вашковьяк)将地影函数展为以 $\cos\lambda$ 为引数的勒让德多项式,

$$\Psi=\frac{1}{2}\Big\{1-P_1(\cos\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\cos\varphi)[P_{n-1}(\cos\lambda)-P_{n+1}(\cos\lambda)]\Big\} \tag{7.190}$$

其中勒让德多项式 $P_k(\cos\lambda)$可以利用天体力学中已有的展式. 他们把这些结果运用到实际中去,效果还是比较好的.

§8 日月引力对人造卫星运动的影响

在研究月球运动时,需要考虑太阳的引力作用. 在研究人造卫星运动时,对于一般的卫星,由于它们距离地球比较近而距离太阳和月亮都比较远,这时日、月引力对卫星运动的影响微乎其微可以忽略不计. 但是对于某些卫星, 例如 1959 年 8 月 7 日发射的"探险者 6 号" (Explorer-6), 它的轨道偏心率特别大, 其远地点高度可达 42485.5 公里; 还有一些同步卫星, 它们的地心距离有 42000 公里左右,这时日、月引力对卫星的作用比较显著. 由后面研究可以看到日、月引力对这些卫星的轨道偏心率将会产生一阶长周期变化从而使它的近地高度大大下降,受到大气阻力增加,结果大大地缩短了卫星的寿命. 例如"探险者 6 号"的寿命就比原来用大气阻力来估计的寿命缩短 10 倍. 这样日、月引力对卫星运动的影响才引起人们的注意. 古在由秀首先讨论了日、月引力对卫星运动的影响. 后来库克(Cook)、莫生、多尔加切夫(Долгачев)等也研究了这个问题. 下面就介绍日、月引力对人造卫星运动的影响.

在地心赤道直角坐标系中,日、月引力对卫星产生的摄动函数可以写为

$$R = Gm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right) = Gm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos\phi}{r'^2}\right) \tag{7.191}$$

式中 m' 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别为日、月质量和地心矢，$\boldsymbol{r}$ 和 Δ 分别是卫星的地心矢和它与日、月之间的距离，ϕ 是卫星和日、月在地心处的张角．显然 $\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\phi$，由于 $r < r'$，故有

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\phi)\left(\frac{r}{r'}\right)^n. \tag{7.192}$$

其中 $P_n(\cos\phi)$ 是以 $\cos\phi$ 为引数的勒让德多项式．

通常 $r \ll r'$，在(7.192)式右端只要取到 $\left(\frac{r}{r'}\right)^2$ 项就足够了．将它代入(7.191)式并略去与卫星根数无关的 $\frac{1}{r'}$ 项（在求卫星根数变化时，摄动函数 R 需对卫星根数求偏导数），我们可以得到：

$$R = \beta r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\phi - \frac{1}{2}\right), \tag{7.193}$$

其中 $\beta = \frac{Gm'}{r'^3}$．在我们所采用的理论单位制中，对于太阳的 $\beta_S = 2.5797\times10^{-6}$，对于月球的 $\beta_M = 5.6187\times10^{-6}$．由(7.193)式可以看出日、月引力，对卫星产生的摄动加速度与地球中心引力所产生的加速度之比约是 βr^3．当卫星在地面附近时 $r\sim1$，该比值在 10^{-6} 数量级，几乎相当于三阶小量，但是当卫星的轨道高度比较大，例如对于同步卫星，这时 $r\sim6.56$，该比值在 10^{-3} 数量级以上，至少相当于二阶小量．

下面先讨论月球引力对卫星运动的影响．设 $\boldsymbol{L}_M$ 和 $\boldsymbol{S}_0$ 分别表示月球和卫星地心矢上的单位向量．我们仍取地心赤道直角坐标系．为了方便起见可将 x 轴指向白道和赤道的交点 γ'，如图 7-5 所示．由图 7-5 可得它们在这样坐标系中的分量分别是：

$$\boldsymbol{L}_M = (\cos u', \cos i'\sin u', \sin i'\sin u') \tag{7.194}$$

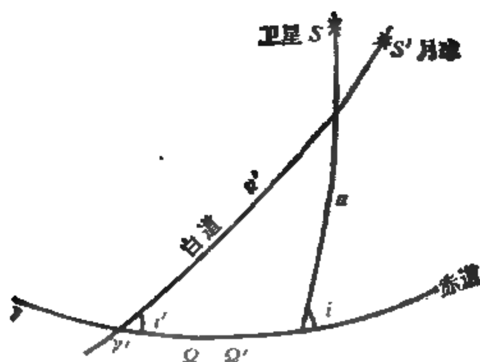


图 7-5

和

$$S_0 = \begin{pmatrix} \cos u\cos(\Omega-\Omega') - \sin u\sin(\Omega-\Omega')\cos i \\ \cos u\sin(\Omega-\Omega') + \sin u\cos(\Omega-\Omega')\cos i \\ \sin u\sin i \end{pmatrix}. \quad (7.195)$$

这时卫星和月球的地心张角 ψ 的余弦为

$$\cos\psi = L_M \cdot S_0 = A\cos u + B\sin u, \quad (7.196)$$

其中 A 和 B 是与卫星运动无关的量，它们是

$$A = A_1\cos u' + A_2\sin u', \quad B = B_1\cos u' + B_2\sin u'. \quad (7.197)$$

这里的 A_1、A_2、B_1 和 B_2 是与月球运动无关的量，它们是:

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = \cos(\Omega-\Omega'), \qquad A_2 = \sin(\Omega-\Omega')\cos i' \\ &B_1 = -\sin(\Omega-\Omega')\cos i, \quad B_2 = \sin i\sin i' + \cos i\cos i'\cos(\Omega-\Omega') \end{aligned}\right\} \quad (7.198)$$

由图7-6可得:

$$\left.\begin{aligned} &\cos i' = \cos\varepsilon\cos J - \sin\varepsilon\sin J\cos\Omega_M \\ &\sin\Omega' = \frac{\sin J\sin\Omega_M}{\sin i'}, \\ &\cos\Omega' = \frac{\cos J - \cos\varepsilon\cos i'}{\sin\varepsilon\sin i'} \\ &\sin\theta = \frac{\sin\varepsilon\sin\Omega'}{\sin J}. \end{aligned}\right\}. \quad (7.199)$$

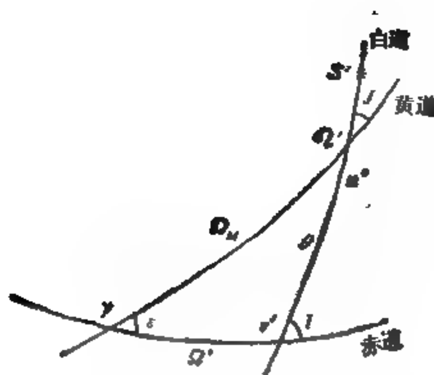


图 7-6

式中 ε 和 J 分别是黄赤交角和黄白交角，Ω_M 是月球轨道升交点 ☊′ 的黄经. 从月球运动中知道 Ω_M 约每 18.6 年增加 2π，它的变化很小，因此从(7.199)式近似可以认为量 i'、Ω' 和 θ 是不变的. J 和 ε 是已知的，若由天文年历查出这时的 $\Omega_☾$，则可由(7.199)式计算出 i'、Ω' 和 θ。

由于黄白交角 J 很小，约为 5°，这时由图 7-6 可以看出月球的纬度角近似有:

$$u' = \widehat{\Upsilon'☊'} + \widehat{☊'S} \approx \theta + L_M - \Omega_M, \qquad (7.200)$$

其中 L_M 是月球的平黄经，每恒星月增加 2π. 由于 θ 几乎不变，Ω_M 变化也很缓慢，因此可以认为 u' 的变化主要来自于 L_M，它的变化周期大约是一个恒星月.

将(7.196)式代入(7.193)式后可得:

$$R = \frac{3}{2}\beta a^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(A^2 + B^2) + \frac{1}{2}(A^2 - B^2)\cos 2u \right.$$
$$\left. + AB\sin 2u\right]. \qquad (7.201)$$

在(7.201)式中，含 M 的是卫星运动的短周期项，它们至少是相当于二阶小量，可以暂时不予考虑. 利用

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2} = \oint\left(\frac{r}{a}\right)^2 \mathrm{d}M = \oint(1 - e\cos E)^3\mathrm{d}E = 1 + \frac{3}{2}e^2,$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f} &= \oint\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f\mathrm{d}M = \oint\left(\frac{r}{a}\right)^2 (2\cos^2 f - 1)\mathrm{d}M \\ &= 2\oint(\cos E - e)^2(1 - e\cos E)\mathrm{d}E - \overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2} \\ &= \frac{5}{2}e^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f} &= \oint\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f\mathrm{d}M = 2\sqrt{1-e^2}\oint\sin E(\cos E - e)\mathrm{d}M \\ &= 2\sqrt{1-e^2}\oint\sin E(\cos E - e)(1 - e\cos E)\mathrm{d}E = 0,\end{aligned}$$

将(7.201)式对M求平均值，得到去掉短周期项后的摄动函数为

$$\begin{aligned}\bar{R} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}M = \frac{3}{2}\beta a^2\Big\{&-\frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) + \frac{1}{2}(A^2 + B^2) \\ &\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) + \frac{5}{2}e^2\Big[\frac{1}{2}(A^2 - B^2)\cos 2\omega \\ &+ AB\sin 2\omega\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{7.202}$$

由(7.197)式可得(7.202)式中的

$$\left.\begin{aligned}A^2 + B^2 = &\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2) + \frac{1}{2}(A_1^2 - A_2^2 \\ &+ B_1^2 - B_2^2)\cos 2u' + (A_1A_2 + B_1B_2)\sin 2u' \\ A^2 - B^2 = &\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 - B_1^2 - B_2^2) + \frac{1}{2}(A_1^2 - A_2^2 \\ &- B_1^2 + B_2^2)\cos 2u' + (A_1A_2 - B_1B_2)\sin 2u' \\ AB = &\frac{1}{2}(A_1B_1 + A_2B_2) + \frac{1}{2}(A_1B_1 - A_2B_2)\cos 2u' \\ &+ \frac{1}{2}(A_1B_2 + A_2B_1)\sin 2u'\end{aligned}\right\}. \tag{7.203}$$

对于太阳引力，消除短周期项后的摄动函数形式仍为(7.202)

式，只是其中的β用β_s代入。另外，这时(7.199)式中取$J=0$即有$i'=\varepsilon, \Omega'=0$，则相应的$A_1=\cos\Omega, A_2=\sin\Omega\cos\varepsilon, B_1=-\sin\Omega\cos i$，$B_2=\sin i\sin\varepsilon+\cos i\cos\varepsilon\cos\Omega$，$u'=L_s$。这里的$L_s$是太阳的平黄经。

需要考虑日、月引力作用的卫星通常说来轨道高度比较大，这时地球形状摄动比较小，大气阻力就更小了，因此$\bar{R}$中的卫星根数a、e、i Ω 和ω都可以视为常量。另外，Ω'和i'也可以视为常量。这样我们就能够把$\bar{R}$分为二部分：与u'无关的常数项R_c和包含u'的周期项R_l。周期项的周期是$\frac{2\pi}{2n'}=\frac{\pi}{n'}$。对于月球引力，$n'$是月球的平均运动，该项周期是半个恒星月；对于太阳引力，n'是太阳的平均运动，该项周期是半个回归年，它们都可以被视为长周期项。由后面可以看出，这二项分别使卫星根数产生二阶长期变化和一阶长周期变化。

将(7.203)式中与u'无关的项代入(7.202)式后可得$\bar{R}$中与u'无关的项是：

$$
\begin{aligned}
R_c=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{R}\,du'=\frac{3}{8}\beta a^2\Big\{&\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)\Big(A_1^2+A_2^2+B_1^2+B_2^2-\frac{4}{3}\Big)\\
&+\frac{5}{2}e^2[(A_1^2+A_2^2-B_1^2-B_2^2)\cos 2\omega+2(A_1\\
&\times B_1+A_2B_2)\sin 2\omega]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{7.204}
$$

将R_c代入摄动运动方程(5.67)式后，可得日、月引力对卫星根数所产生的二阶长期项$\sigma_2(t-t_0)$的系数σ_2是：

$$
\begin{aligned}
a_2&=0\\
e_2&=-\frac{15}{8}\beta a^{3/2}e(1-e^2)^{1/2}[2(A_1B_1+A_2B_2)\cos 2\\
&\quad\times\omega-(A_1^2+A_2^2-B_1^2-B_2^2)\sin 2\omega]\\
i_2&=-\frac{3}{8}\beta a^{3/2}(1-e^2)^{-1/2}\csc i\Big\{2\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)(A_1\\
&\quad\times A_1'+A_2A_2'+B_1B_1'+B_2B_2')+5e^2[(A_1A_1'
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad +A_2A_2'-B_1B_1'-B_2B_2')-2(A_1B_1+A_2B_2)\\
&\cos i]\cos 2\omega+5e^2[(A_1'B_1+A_1B_1'+A_2'B_2+A_2B_2')\\
&+(A_1^2+A_2^2-B_1^2-B_2^2)\cos i]\sin 2\omega\Big\}\\
&\Omega_2=\frac{3}{8}\beta a^{3/2}(1-e^2)^{-1/2}\csc i\Big\{2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\\
&\qquad\times(B_1B_1''+B_2B_2'')-5e^2(B_1B_1''+B_2B_2'')\\
&\qquad\times\cos 2\omega+5e^2(A_1B_1''+A_2B_2'')\sin 2\omega\Big\}\\
&\omega_2=-\cos i\Omega_2+\omega_2^*\\
&\omega_2^*=\frac{3}{8}\beta a^{3/2}(1-e^2)^{1/2}\Big\{3\Big(A_1^2+A_2^2+B_1^2+B_2^2\\
&\qquad-\frac{4}{3}\Big)+5[(A_1^2+A_2^2-B_1^2-B_2^2)\cos 2\omega+2\\
&\qquad\times(A_1B_1+A_2B_2)\sin 2\omega]\Big\}\\
&M_2=-(1-e^2)^{1/2}\omega_2^*-\frac{3}{2}\beta a^{3/2}\Big\{\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\\
&\qquad\times\left(A_1^2+A_2^2+B_1^2+B_2^2-\frac{4}{3}\right)+\frac{5}{2}e^2[(A_1^2\\
&\qquad+A_2^2-B_1^2-B_2^2)\cos 2\omega+2(A_1B_1+A_2B_2)\\
&\qquad\times\sin 2\omega]\Big\}
\end{aligned}\right\}. \quad (7.205)
$$

其中 A_1'、A_2'、B_1' 和 B_2' 表示 A_1、A_2、B_1 和 B_2 对卫星根数 Ω 的偏导数；B_1'' 和 B_2'' 表示 B_1 和 B_2 对卫星根数 i 的偏导数。由(7.198)式有：

$$
\left.\begin{aligned}
&A_1'=-\sin(\Omega-\Omega'),\qquad A_2'=\cos i\cos(\Omega-\Omega')\\
&B_1'=-\cos i\cos(\Omega-\Omega'),\ B_2'=-\cos i\cos i'\sin(\Omega-\Omega')\\
&B_1''=\sin i\sin(\Omega-\Omega')\\
&B_2''=\cos i\sin i'-\sin i\cos i'\cos(\Omega-\Omega')
\end{aligned}\right\}. \quad (7.206)
$$

在 $\bar{R}$ 中除去与 u' 无关的 R_c 后可得含 u' 的项是：

$$
\begin{aligned}
R_l = \bar{R} - R_c = \frac{3}{8}\beta a^2 \Big\{\Big[\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)(A_1^2 - A_2^2 + B_1^2 - B_2^2) \\
+ \frac{5}{2}e^2(A_1^2 - A_2^2 - B_1^2 + B_2^2)\cos 2\omega + 5e^2(A_1B_1 - A_2B_2) \\
\times \sin 2\omega\Big]\cos 2u' + \Big[2\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)(A_1A_2 + B_1B_2) \\
\times 5e^2(A_1A_2 - B_1B_2)\cos 2\omega + 5e^2(A_1B_2 + A_2B_1)\sin 2\omega\Big] \\
\times \sin 2u'\Big\}.
\end{aligned} \tag{7.207}
$$

将 R_l 代入摄动运动方程，利用(7.200)式有$\frac{du'}{dt} \approx \frac{dL}{dt} = n'$，这里 n' 是日、月平均运动，对 t 积分改为对 u' 积分，结果可得日、月引力对卫星根数所产生的摄动是：

$$
\begin{aligned}
a_l &= 0 \\
e_l &= -\frac{15\beta}{16 n'}a^{3/2}e(1-e^2)^{1/2}\{[2(A_1B_1 - A_2B_2)\cos 2\omega \\
&\quad -(A_1^2 - A_2^2 - B_1^2 + B_2^2)\sin 2\omega]\sin 2u' - [2(A_1B_2 \\
&\quad + A_2B_1)\cos 2\omega - 2(A_1A_2 - B_1B_2)\sin 2\omega]\cos 2u'\} \\
i_l &= \frac{3\beta}{16 n'}a^{3/2}(1-e^2)^{-1/2}\csc i\Big\{-\Big[2\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)(A_1'A_1 \\
&\quad - A_2'A_2 + B_1'B_1 - B_2'B_2) + 5e^2(A_1'A_1 - A_2'A_2 \\
&\quad - B_1'B_1 + B_2'B_2)\cos 2\omega - 10e^2(A_1B_1 - A_2B_2)\cos i \\
&\quad \times \cos 2\omega + 5e^2(A_1'B_1 + A_1B_1' - A_2'B_2 - A_2B_2') \\
&\quad \times \sin 2\omega + 5e^2(A_1^2 - A_2^2 - B_1^2 + B_2^2)\cos i \sin 2\omega\Big] \\
&\quad \times \sin 2u' + \Big[2\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)(A_1'A_2 + A_1A_2' + B_1' \\
&\quad \times B_2 + B_1B_2') + 5e^2(A_1'A_2 + A_1A_2' - B_1'B_2 - B_1 \\
&\quad \times B_2')\cos 2\omega - 10e^2(A_1B_2 + A_2B_1)\cos i\cos 2\omega \\
&\quad + 5e^2(A_1'B_2 + A_1B_2' + A_2'B_1' + A_2B_1)\sin 2\omega + 10e^2
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\times(A_1A_2-B_1B_2)\cos i\sin 2\omega\Big]\cos 2u'\Big\}\\
\Omega_l&=\frac{3\beta}{16n'}a^{3/2}(1-e^2)^{-1/2}\csc i\Big\{\Big[2\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)(B_1B_1''\\
&-B_2B_2'')-5e^2(B_1B_1''-B_2B_2'')\cos 2\omega+5e^2(A_1\\
&\times B_1''-A_2B_2'')\sin 2\omega\Big]\sin 2u'-\Big[2\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)\\
&\times(B_1''B_2+B_1B_2'')-5e^2(B_1''B_2+B_1B_2'')\cos 2\omega\\
&+5e^2(A_1B_2''+A_2B_1'')\sin 2\omega\Big]\cos 2u'\Big\}\\
\omega_l&=-\cos i\,\Omega_l+\omega_l^*\\
\omega_l^*&=\frac{3\beta}{16n'}a^{3/2}(1-e^2)^{1/2}\{[3(A_1^2-A_2^2+B_1^2-B_2^2)\\
&+5(A_1^2-A_2^2-B_1^2+B_2^2)\cos 2\omega+10(A_1B_1\\
&-A_2B_2)\sin 2\omega]\sin 2u'-[6(A_1A_2+B_1B_2)\\
&+10(A_1A_2-B_1B_2)\cos 2\omega+10(A_1B_2+A_2B_1)\\
&\times\sin 2\omega]\cos 2u'\}\\
M_l&=-(1-e^2)^{1/2}\omega_l^*-\frac{3\beta}{4n'}a^{3/2}\Big\{\Big[\Big(1+\frac{3}{2}e^2\Big)(A_1^2-A_2^2\\
&+B_1^2-B_2^2)+\frac{5}{2}e^2(A_1^2-A_2^2-B_1^2+B_2^2)\cos 2\omega\\
&+2(A_1B_1-A_2B_2)\sin 2\omega\Big]\sin 2u'-\Big[2\Big(1+\frac{3}{2}\\
&\times e^2\Big)(A_1A_2+B_1B_2)+5e^2(A_1A_2-B_1B_2)\\
&\times\cos 2\omega+5e^2(A_1B_2+A_2B_1)\sin 2\omega\Big]\cos 2u'\Big\}
\end{aligned}\right\}. \quad (7.208)
$$

式中 A_1'、A_2'、B_1'、B_2'、B_1'' 和 B_2'' 含义与前面相同即为(7.206)式。n' 为日、月平均运动，对于月球 $n'=r'^{-3/2}\sim 2\times10^{-3}$，对于太阳 $n'\sim0.2\times10^{-3}$，它们可以视为一阶小量。因此这里所得到的 σ_l 应当算作为一阶长周期项，对于月球其周期约是半个恒星月，对于太阳其周期约是半个回归年。

如果卫星距离地球不是很远，例如轨道半长径 $a\sim 2$，但又要考虑到日、月引力作用时，则 $\overline{R}$ 中的卫星根数 Ω 和 ω 不能视为常量。由(7.198)式可得在 $A_1^2+A_2^2+B_1^2+B_2^2$ 中与 Ω 无关的项是:

$$\frac{1}{2}(1+\cos^2 i+\cos^2 i'+2\sin^2 i\sin^2 i'+\cos^2 i\cos^2 i')$$
$$=\frac{1}{2}(4-2\sin^2 i-2\sin^2 i'+3\sin^2 i\sin^2 i').$$

将它代入(7.204)式后，可得与 Ω 和 ω 无关的常数项是:

$$R_c=\frac{3}{8}\beta a^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\left(\frac{2}{3}-\sin^2 i\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right). \quad (7.209)$$

将这里的 R_c 代入摄动运动方程(5.67)式后可得真正的二阶长期项的系数是:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1=e_1=i=0\\
&\Omega_1=-\frac{3}{4}\beta a^{3/2}(1-e^2)^{-1/2}\cos i\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\left(1-\frac{3}{2}\right.\\
&\qquad\left.\times\sin^2 i'\right)\\
&\omega_1=\frac{3}{8}\beta a^{3/2}(1-e^2)^{-1/2}(4-5\sin^2 i+e^2)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\\
&M_1=\frac{3}{8}\beta a^{3/2}\left(\sin^2 i-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)
\end{aligned}\right\} \quad (7.210)$$

在(7.210)式中的 $\sin^2 i'$ 还包含有周期约为18.6年的月球轨道升交点黄经 Ω_M 的周期变化。如果去掉这个周期项的话，则式中的 $\sin^2 i'$ 可以用 $\overline{\sin^2 i'}$ 来代替。从(7.199)式可得 $\overline{\sin^2 i'}=1-\cos^2\varepsilon\cos^2 J-\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon\sin^2 J=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon\right)\sin^2 J+\sin^2\varepsilon\cos^2 J$。对于太阳引力，$\overline{\sin^2 i'}=\sin^2\varepsilon$。

由(7.208)式可以看出日、月引力会使卫星除轨道半长径 a 外的其余根数产生一阶长周期变化。由于卫星轨道偏心率 e 的长周期变化，会使卫星近地点高度在某段时间内降低较多，卫星将在

较浓密的大气层中运动，在大气阻力作用下大大地缩短了卫星的寿命。

最后需要指出的是在上节和本节所得到的一阶长周期项是(7.14)式中的 $\int^t F_2 dt$，这是直接部分。此外还应当包括间接部分 $\int^t \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_j)_l dt$。其中 F_1 是地球形状摄动中 J_2 相对应的项。类似(7.60)和(7.61)式，对于卫星根数 a、e 和 i，它们的间接部分为零；对于卫星根数 Ω、ω 和 M，它们的间接部分变为 $\int^t \left(\frac{\partial F_1}{\partial a} a_l + \frac{\partial F_1}{\partial e} e_l + \frac{\partial F_1}{\partial i} i_l\right) dt$。其中 F_1 的形式分别为(7.24)式中的 Ω_1、ω_1 和 $M_1 - n$；a_l、e_l 和 i_l 是其直接部分。对于光压作用就是(7.181)式对于日、月引力就是(7.208)式。完整的一阶长周期项应当是直接和间接这两部分之和。

§9 人造卫星所受摄动比较和位置预报

人造卫星除了受到地球形状摄动、大气阻力，光压作用和日、月引力作用外，还受到其它一些作用力。例如相对论效应，行星引力、潮汐作用、大气引力、流量碰撞等。如果卫星本身带电，还受到地球磁场的电磁力。一般情况下，这些作用力都比较小。对于普通的卫星预报，可以不考虑这些摄动作用。

为了便于了解各种轨道类型的卫星应当考虑哪些作用力，从而进行卫星根数预推和位置预报，我们可以把卫星所受到的一些作用力进行比较。为了方便起见，我们以地球表面的引力加速度 9.8 米/秒^{2}作为各种摄动加速度的单位。

在地球引力场位函数中，中心引力对卫星产生的加速度是：

$$g_0 = \frac{1}{r^2}, \tag{7.211}$$

J_2 项对卫星产生的最大加速度是：

$$g_1 = 3.25 \times 10^{-3} \frac{1}{r^4}, \tag{7.212}$$

高阶带谐系数中，J_3 项影响最大，它对卫星产生的最大加速度是：

$$g_2 = 1.02 \times 10^{-5} \frac{1}{r^5}, \tag{7.213}$$

若卫星的面质比是 1 米²/千克，则大气阻力对卫星产生的加速度是：

$$g_3 = 7.01 \times 10^{9} \frac{\rho(r)}{r}, \tag{7.214}$$

其中 $\rho(r)$ 是大气密度。如果卫星的地面高度为 150 公里，由表 7-5 可得 $\log \rho = -11.67$，$\rho = 2.14 \times 10^{-12}$，这时 $g_3 = 1.46 \times 10^{-3}$。

若卫星的面质比是 1 米²/千克，则太阳光压力对卫星产生的加速度是：

$$g_4 = 0.93 \times 10^{-8}, \tag{7.215}$$

月球引力对卫星产生的加速度是：

$$g_5 = 5.61 \times 10^{-6} \frac{(2 - 0.0166r)r}{(1 - 0.0166r)^2}, \tag{7.216}$$

太阳引力对卫星产生的加速度是：

$$g_6 = 5.16 \times 10^{-8} r, \tag{7.217}$$

利用 (7.211)—(7.217) 式，可以将 $g_0, \cdots\cdots g_6$ 与 r 的关系绘制成图 7-7。绘图时为了方便起见，我们以 $x = \log r$ 为横坐标，以 $y_i = 8 + \log g_i$ $(i = 0, 1, \cdots 6)$ 为纵坐标，这样可以把幂次关系变为线性关系。

由图 7-7 可以看出，各种摄动与距离关系是不同的。有些摄动随距离增加而减小，有些却增加，还有保持不变的。我们应当根据卫星的不同类型的轨道，考虑不同的摄动作用。

(1) 离开地面高度 150—700 公里 $(1.02 < r < 1.11)$。

处于这样高度范围内的卫星属于近地卫星。对于近地卫星需

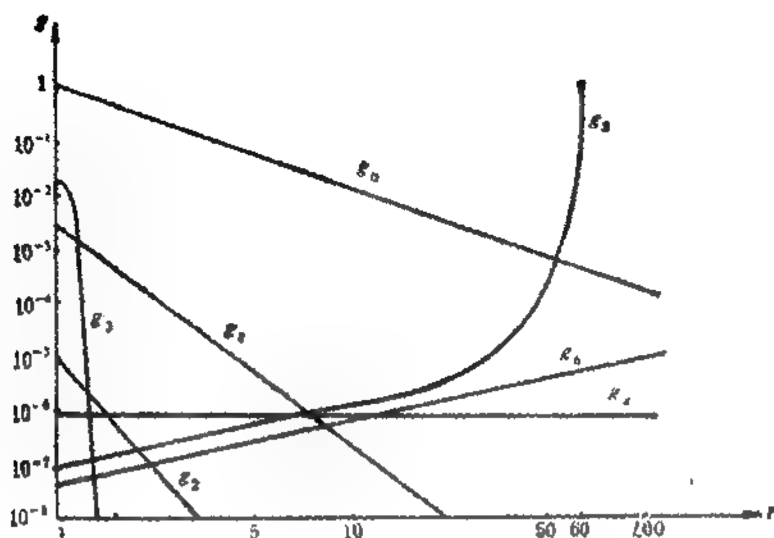


图 7-7

要考虑地球形状摄动和大气阻力．如果卫星的面质比很大，还需考虑光压作用．

(2) 高度 700—10,000 公里 ($1.11 < r < 2.57$)．

处于这样高度范围内的卫星只需要考虑地球形状摄动．如果卫星的面质比很大，还需考虑光压作用．这种类型的卫星由于可以忽略往往难以估计的大气阻力的影响，它们特别适合于进行测地工作、例如“帕吉斯 1 号”．

(3) 高度 10,000—100,000 公里 ($2.57 < r < 16.68$)．

处于这样高度范围内的卫星除了需要考虑地球形状摄动（往往只要取到 J_2 项）外，还需要考虑日、月引力作用．对于面质比比较大的卫星，还需要考虑光压作用．作为通讯用的同步卫星就属于这种轨道类型．

(4) 高度大于 100,000 公里 ($r > 16.68$)．

处于这样高度范围内的卫星只需要考虑日、月引力作用．同样对于面质比比较大的卫星还需考虑光压作用． 不过到目前为

止，在已发射的卫星中还未发现是属于这样类型的轨道，因为这时往往可以划归为月球探测器或者行星探测器，而不再属于人造地球卫星了。

我们根据卫星的轨道类型，确定了需要考虑哪些摄动作用，然后利用前面所得到的各种摄动对卫星根数产生的长期和周期变化，预推以后一系列时刻卫星根数的数值。在进行卫星轨道根数外推时，其中根数M不太容易算准，这时往往采用另一个根数，例如卫星过轨道升交点的时刻t_{Ω}或者过某标准纬圈φ_0的时刻t_{φ_0}来代替根数M。

我们称卫星连续二次经过轨道升交点的时间间隔为它的交点周期，并用T_{Ω}来表示。经过推算可以得到卫星的交点周期是：

$$T_{\Omega}=\bar{T}\left\{1+\frac{A_2}{a^2}[-(3-4\sin^2 i)+(4-5\sin^2 i)e\cos\omega\right\}$$

$$+O(e^2A_2,A_2^2)。\qquad(7.218)$$

其中$A_2=\frac{3}{2}J_2$，$\bar{T}$是卫星的平周期。

我们称卫星连续二次以相同方向经过某标准纬圈φ_0的时间间隔为它的过标准纬圈周期，并用T_{φ_0}来表示。同样可以推算出卫星过标准纬圈φ_0的周期是：

$$T_{\varphi_0}=\bar{T}\left\{1+\frac{A_2}{a^2}[(-3-4\sin^2 i)+(4-5\sin^2 i)e\cos(u_0-\omega)]\right\}$$

$$+O(e^2A_2,A_2^2)。\qquad(7.219)$$

式中u_0是卫星过φ_0处的纬度角，有$\sin u_0=\frac{\sin\varphi_0}{\sin i}$。若取$\varphi_0=0$即在轨道升交点处，这时$u_0=0$，(7.219)式就变为(7.218)式。

利用卫星的交点周期T_{Ω}或者过标准纬圈φ_0的周期T_{φ_0}以及它们的变率就可以预推以后一系列时刻卫星过轨道升交点的时刻t_{Ω}或者过标准纬圈φ_0的时刻t_{φ_0}。

通过卫星根数的预推，我们可以得到所要预报时刻卫星根数的值，从而进行卫星的视位置预报。

令$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{R}$表示卫星和观测站的地心坐标，$\boldsymbol{\rho}$表示卫星相对于

观测站的视坐标，显然有

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}, \tag{7.220}$$

采用地心赤道直角坐标系，则有

$$\boldsymbol{r} = r\begin{pmatrix} \cos u\cos\Omega - \sin u\cos i\sin\Omega \\ \cos u\sin\Omega + \sin u\cos i\cos\Omega \\ \sin u\sin i \end{pmatrix}, \tag{7.221}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} (c+h)\cos\varphi\cos s \\ (c+h)\cos\varphi\sin s \\ (d+h)\sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{7.222}$$

和

$$\boldsymbol{\rho} = \rho\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}. \tag{7.223}$$

其中 $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$，$u = \omega + f$；$c = (1 - e^2\sin^2\varphi)^{-1/2}$，$d = (1-e^2)c$；$h$、$\varphi$ 和 s 分别是观测站的海拔高度，地理纬度和观测时刻的地方恒星时；如果采用克拉索夫斯基椭球体的话，$e = 0.08181333$，c 和 d 的数值可以从天文年历上查得；α 和 δ 是卫星的赤经和赤纬。

根据所要预报时刻 t 时的卫星根数 σ 和观测站的地心位置由(7.221)和 (7.222) 式求出 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$，然后再利用 (7.220) 和 (7.223) 式就可以得到此时卫星的视位置 α 和 δ。通常观测时采用的是地平坐标系。若规定方位角是从北点量起，可以得到地平坐标系和赤道坐标系之间换算关系是：

$$\left.\begin{aligned} &\sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos\tau \\ &\cos h\cos A = \cos\varphi\sin\delta - \cos\delta\sin\varphi\cos\tau \\ &\cos h\sin A = -\cos\delta\sin\tau \end{aligned}\right\}. \tag{7.224}$$

式中 A 和 h 就是卫星的方位角和地平高度；τ 是卫星的时角，有 $\tau = s + \lambda - \alpha$，$\lambda$ 是观测站的地理经度；如果将观测时刻的地方恒星时 s 换为格林威治地方恒星时 s_G，则有 $s = s_G + \lambda$。利用(7.224)

式最后可以作出卫星视位置的预报即 s 时的 A 和 h。

众所周知，卫星预报的目的是为了能够进一步观测它。因此在卫星预报时还需要考虑它能被观测到的条件。用光学方法观测人造卫星必须要满足下列三个条件。

(1) 在观测卫星时，当地的天光要足够暗。

人造卫星的亮度有限，只有在当地的天光足够暗时才能被观测到。通常我们可以取太阳中心在地平下 9° 作为卫星观测的晨昏朦影。这时太阳和观测站的地心张角为 99° 若用 $\boldsymbol{L}_\odot$ 和 $\boldsymbol{R}_0$ 表示日心和观测站在地心方向上的单位向量，则在地心赤道直角坐标系中有：

$$\boldsymbol{L}_\odot = \begin{pmatrix} \cos\delta_\odot \cos\alpha_\odot \\ \cos\delta_\odot \sin\alpha_\odot \\ \sin\delta_\odot \end{pmatrix} \tag{7.225}$$

和

$$\boldsymbol{R}_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi' \cos s \\ \cos\varphi' \sin s \\ \sin\varphi' \end{pmatrix}. \tag{7.226}$$

式中 $\alpha_\odot$ 和 $\delta_\odot$ 是太阳的赤经和赤纬；$\cos\varphi' = \dfrac{c+h}{R}\cos\varphi$，

$\sin\varphi' = \dfrac{d+h}{R}\sin\varphi$ 或者 $\varphi' = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{d+h}{c+h}\operatorname{tg}\varphi\right)$。

当太阳和观测站的地心张角达 99° 时，天光才足够暗，这时有 $\boldsymbol{L}_\odot \cdot \boldsymbol{R}_0 = \cos 99°$。利用(7.225)和(7.226)式可得所应当满足的方程是：

$$\cos\delta_\odot \cos\varphi' \cos(s-\alpha_\odot) + \sin\delta_\odot \sin\varphi' = \cos 99°. \tag{7.227}$$

由(7.227)式可以算出两个地方恒星时 s，再换算为两个世界时，一个相应于昏影终，另一个相应于晨光始。天光足够暗的条件要求观测卫星的时间限制在昏影终之后和晨光始之前。

(2) 卫星必须在地影外能被太阳照亮。

卫星和月球一样是靠反射太阳光发亮的.当卫星进入地影时，它不受太阳照射，不能反射太阳光，因此也无法看到。采用光学方法观测卫星必须要使卫星在地影外能被太阳照亮。

仍用 $\boldsymbol{S}_0$ 表示卫星在地心方向上的单位向量，由(7.221)式可得它在地心赤道直角坐标系中分量是：

$$\boldsymbol{S}_0=\begin{pmatrix}\cos u\cos\Omega-\sin u\cos i\sin\Omega\\ \cos u\sin\Omega+\sin u\cos i\cos\Omega\\ \sin u\sin i\end{pmatrix}. \tag{7.228}$$

由图 7-4 和 (7.183) 式知道卫星进出地影时所应满足的方程是：

$$\sin\phi=\frac{1}{r},\ \cos\phi=\boldsymbol{L}_{\odot}\cdot\boldsymbol{S}_0<0.$$

或者写为

$$\boldsymbol{L}_{\odot}\cdot\boldsymbol{S}_0=-\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}. \tag{7.229}$$

将(7.225)和(7.228)式代入(7.229)式后，可得地影方程是：

$$\cos\delta_{\odot}\cos(\alpha_{\odot}-\Omega)\cos u+[\sin i\sin\delta_{\odot}+\cos i\cos\delta_{\odot}\times\sin(\alpha_{\odot}-\Omega)]\sin u=-\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}. \tag{7.230}$$

令 $\cos\delta_{\odot}\cos(\alpha_{\odot}-\Omega)=A\cos U_1$, $\sin i\sin\delta_{\odot}+\cos i\cos\delta_{\odot}\sin\times(\alpha_{\odot}-\Omega)=A\sin U_1$，则(7.230)式化为

$$A\cos(u-U_1)=-\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}. \tag{7.231}$$

式中 $r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos(u-\omega)}$.

(7.231)式是关于 u 的超越方程，以 $r=a$ 为初值可以用迭代法解出二个值 u_1 和 u_2，它们分别是卫星出地影和进地影时的纬度角，再换算为相应的卫星出地影和进地影的世界时。卫星在地影外的条件要求观测卫星的时间限制在它出地影之后和进地影之

前．在(7.231)式中，如果卫星的地心距离 $r > \sqrt{\frac{1}{1-A^2}}$，则有 $A_1 < \sqrt{1-\frac{1}{r^2}}$，这时方程无解．它说明卫星离开地球足够远而不会进入地影。

(3) 卫星必须飞过观测站上空。

卫星要在地平线上才有可能被观测到，这不仅是光学观测方法而且是所有其它观测方法所必须满足的条件．通常观测站周围总有些障碍物和灯光．为了确保观测精度，我们在预报和观测卫星时，总要使它具有一定的地平高度．我们令这个地平高度为 h_0．在图 7-8 中，设 z 和 s 分别为观测站和卫星，这时相应于 h_0 的地心张角为 θ_0。由平面三角形 soz，利用正弦定理有

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h_0\right)}{r}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h_0-\theta_0\right)}{R},$$

或者是

$$\cos(\theta_0+h_0)=\frac{R}{r}\cos h_0. \tag{7.232}$$

由(7.232)式可以解出

$$\theta_0=\arccos\left(\frac{R}{r}\cos h_0\right)-h_0. \tag{7.233}$$

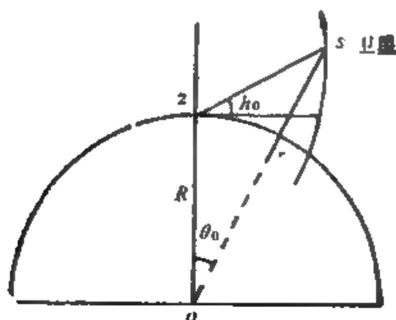


图 7-8

由图 7-8 可以看出，要求卫星的地平高度达 h_0 时所应满足的方程是

$$\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{S}_0 = \cos\theta_0. \tag{7.234}$$

将(7.226)和(7.228)式代入(7.234)式后，可得高度要求的条件方程是：

$$\cos\varphi'\cos(s-\Omega)\cos u + [\sin i\sin\varphi' + \cos i\cos\varphi'\sin(s-\Omega)] \times \sin u = \cos\theta_0. \tag{7.235}$$

令 $\cos\varphi'\cos(s-\Omega) = B\cos U_2$，$\sin i\sin\varphi' + \cos i\cos\varphi' \times \sin \times (s-\Omega) = B\sin U_2$，则(7.235)式化为

$$B\cos(u-U_2) = \cos\theta_0. \tag{7.236}$$

(7.236)式也是关于 u 的超越方程，可以用迭代法解出二个值 u_3 和 u_4，它们分别是卫星的地平高度上升到 h_0 和下降到 h_0 时的纬度角，再进一步换算为卫星出和没“地平”时的世界时。卫星飞过观测站上空而能被观测到的条件要求观测卫星的时间限制在它的地平高度上升到 h_0 之后和下降到 h_0 之前。在(7.233)式中，如果卫星的地心距离 r 越小，则 θ_0 就越小，$\cos\theta_0$ 就越大。当 $|B| < \cos\theta_0$ 时，(7.236)式无解。它说明卫星有可能离观测站较远但本身高度又不够高而不能被观测到。

我们采用光学方法观测人造卫星时，必须要选择观测时间使它们同时满足三个条件方程(7.227)、(7.231)和(7.236)式。如果采用激光、雷达和无线电等其它方法观测人造卫星时，只需要选择观测时间使它们满足条件方程(7.236)式就行了。

§10 静止卫星的轨道及其稳定性

在已发射的人造卫星中，有一类卫星的轨道比较特殊，它们的轨道偏心率接近于0，轨道倾角接近于0°，运动周期与地球自转周期相同这种卫星属于同步卫星。由于它们停留在赤道上空，相对于地面目标是静止不动的，故又称为静止卫星。第一颗静止卫星

是 1964 年 8 月 19 日美国发射的“辛康 3 号”（Syncóm —3)它的轨道偏心率是 0.0028，轨道倾角是 0°.08，运动周期是 1436.2 分钟；再如 1977 年 2 月 23 日日本发射的第一颗静止卫星“菊 2 号”(ETS—2)，它的轨道偏心率是 0.0002，轨道倾角是 0°.4，运动周期是 1436.0 分钟．到目前为止已经发射了上百颗静止卫星． 静止卫星主要用于通讯联系和电视转播，研究静止卫星的轨道及其稳定性的问题是具有很高的实用价值．1957 年巴特拉科夫（Батраков）首先讨论了静止卫星的运动问题，后来塞纳尔和鲁波夫(Lubowe)，勃里茨尔(Blitzer)等人都研究过静止卫星轨道及其稳定性问题．下面我们讨论静止卫星在地球引力场中主要带谐项和田谐项的摄动作用下的运动轨道及其稳定性问题．

在(1.54)式中，忽略了 J_4 项可得包含有主要带谐项 J_2 和田谐项 C_{22}、S_{22} 的位函数为

$$V = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{J_2}{2r^2}(3\sin^2\varphi - 1) + \frac{\beta}{2r^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda_p\right]. \quad (7.237)$$

式中 r、φ 和 λ_p 是卫星的地心距离，纬度和从地球赤道长轴起算的经度；$\beta = 6\sqrt{C_{22}^2+S_{22}^2}$．

由(1.9)式可得三维空间中的速度的平方是

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\frac{d\xi_i}{dt}\frac{d\xi_j}{dt},$$

因而单位质量卫星所具有的动能应为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\frac{d\xi_i}{dt}\frac{d\xi_j}{dt}. \quad (7.238)$$

我们仍然采用球面坐标系，分别取 $\xi_1 = r, \xi_2 = \varphi, \xi_3 = \lambda$. 由于下面要利用拉格朗日方程，它在惯性系或者空间固定坐标系中才成立，因此这里的 λ 是从春分点(这样才属于空间固定坐标系)起算的卫星经度，有 $\lambda = \lambda_p + \lambda_e$. 其中 λ_e 表示从春分点起算的地球赤道长轴的经度，它与地球的自转有关．显然有 $\dot{\lambda} = n' + \dot{\lambda}_p$，$n'$ 是地球自转角速度．在这样坐标系中，空间度规张量是：

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1, 0, 0, & & \\ 0, r^2, 0 & & \\ 0, 0, r^2\cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

将它代入(7.238)式中可得:

$$T = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\cos^2\varphi(n' + \dot{\lambda}_p)^2]. \qquad (7.239)$$

地球引力场是一个保守场，在惯性系中卫星的运动应当满足拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0. \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (7.240)$$

其中L是拉格朗日函数，有

$$L = T + V. \qquad (7.241)$$

利用(7.237)、(7.239)和(7.241)式可以求出

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_3} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = r^2\cos^2\varphi(n' + \dot{\lambda}_p) \\
\frac{\partial L}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial (T + V)}{\partial r} = r\dot{\varphi}^2 + r\cos^2\varphi(n' + \dot{\lambda}_p)^2 - \frac{1}{r^2} \\
&\quad + \frac{3}{2}\frac{J_2}{r^4}(3\sin^2\varphi - 1) - \frac{3\beta}{2r^4}\cos^2\varphi\cos 2\lambda_p \\
\frac{\partial L}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial (T + V)}{\partial \varphi} = -r^2\sin\varphi\cos\varphi(n' + \dot{\lambda}_p)^2 - \frac{3J_2}{r^3} \\
&\quad \times \sin\varphi\cos\varphi - \frac{\beta}{r^3}\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\lambda_p \\
\frac{\partial L}{\partial \xi_3} &= \frac{\partial (T + V)}{\partial \lambda} = -\frac{\beta}{r^3}\cos^2\varphi\sin 2\lambda_p
\end{aligned}\right\}. \qquad (7.242)$$

将(7.242)式代入(7.240)式后，可得这时卫星的运动方程是:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\cos^2\varphi(n' + \dot{\lambda}_p)^2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{3J_2}{2r^4}(3\sin^2\varphi \\
&\qquad\qquad -1) - \frac{3\beta}{2r^4}\cos^2\varphi\cos 2\lambda_p \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) + \frac{r^2}{2}(n' + \dot{\lambda}_p)^2\sin 2\varphi = -\frac{3J_2}{2r^3}\sin 2\varphi \\
&\qquad\qquad -\frac{\beta}{2r^3}\sin 2\varphi\cos 2\lambda_p \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r^2\cos^2\varphi(n' + \dot{\lambda}_p)] = -\frac{\beta}{r^3}\cos^2\varphi\sin 2\lambda_p
\end{aligned}\right\}. \quad (7.243)$$

我们可以把地球自转角速度 n' 看作为常数。在(7.243)式中作自变量变换 $\mathrm{d}\tau = n'\mathrm{d}t$，并用"$'$"表示对 τ 的微商和令 $\alpha = \frac{1}{n'^2}$，这时(7.243)式可以化为

$$\left.\begin{aligned}
&r'' - r\varphi'^2 - r\lambda_p'(2 + \lambda_p')\cos^2\varphi = f(r,\varphi,\lambda_p) \\
&\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' r' + \frac{1}{2}\lambda_p'(2 + \lambda_p')\sin 2\varphi = g(r,\varphi,\lambda_p) \\
&\lambda_p'' + 2(1 + \lambda_p')\left(\frac{1}{r}r' - \varphi'\operatorname{tg}\varphi\right) = h(r,\varphi,\lambda_p)
\end{aligned}\right\}. \quad (7.244)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&f(r,\varphi,\lambda_p) = r\cos^2\varphi - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{3\alpha J_2}{2r^4}(3\sin^2\varphi - 1) \\
&\qquad\qquad -\frac{3\alpha\beta}{2r^4}\cos^2\varphi\cos 2\lambda_p \\
&g(r,\phi,\lambda_p) = -\frac{\alpha}{2r^5}\left(3J_2 + \beta\cos 2\lambda_p + \frac{r^5}{\alpha}\right) \\
&\qquad\qquad \times\sin 2\varphi \\
&h(r,\varphi,\lambda_p) = -\frac{\alpha\beta}{r^5}\sin 2\lambda_p.
\end{aligned}\right\}. \quad (7.245)$$

(7.244)式是三个二阶非线性微分方程组，一般情况下得不到通解。但是它与圆型限制性三体问题中的方程(4.58)式相似，可以得到它的一组特解。这组特解就是常数解 $r = r_0, \varphi = \varphi_0, \lambda_p =$

λ_0，它们同样被称为秤动点。

将 $f(r_0,\varphi_0,\lambda_0)=g(r_0,\varphi_0,\lambda_0)=h(r_0,\varphi_0,\lambda_0)=0$ 代入(7.245)式，由此解出秤动点的位置$(r_0,\varphi_0,\lambda_0)$。首先从(7.245)的第二式可得 $\sin 2\varphi_0=0$，考虑到(7.245)的第一式只能取 $\varphi_0=0$，因为若取 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$，则由(7.245)的第一式得到 $r_0^2=3J_2$ 不合理的结果。$\varphi_0=0$，说明秤动点应当在赤道面上。再从(7.245)的第三式可得 $\sin 2\lambda_0=0$，由此解得 $\lambda_0=0$ 或者 π和 $\lambda_0=\frac{\pi}{2}$或者$\frac{3\pi}{2}$。前者说明秤动点是在地球赤道的长轴方向上，后者说明还有秤动点是在地球赤道的短轴方向上。最后再将它们代入(7.245)的第一式，可以解得 $r_0=\left[\alpha\left(1+\frac{3J_2}{2r_0^2}\pm\frac{3\beta}{2r_0^2}\right)\right]^{1/3}$，式中正号相应于长轴方向，负号相应于短轴方向。由于 J_2 和β是小量，可以以 $r_0\approx\alpha^{1/3}=(n')^{-2/3}$ 为初值，根据 J_2 和β的数值采用迭代法求出 $r_0=42090$ 公里和 42060 公里。因此方程(7.244)式总共有四个秤动点：在赤道长轴上有二个，它们的位置分别是 $\varphi_0=0$，$\lambda_0=0$，$r_0=42090$公里和 $\varphi_0=0$，$\lambda_0=\pi$，$r_0=42090$ 公里；在赤道短轴上也有二个，它们的位置分别是 $\varphi_0=0$，$\lambda_0=\frac{\pi}{2}$，$r_0=42060$ 公里和 $\varphi_0=0$，$\lambda_0=\frac{3\pi}{2}$，$r_0=42060$ 公里。

由于地球赤道长轴和短轴的方向很难完全确定；卫星发射的控制系统精度也有限，这样卫星也不可能准确发射到秤动点位置上；另外，由于日、月和其它摄动的作用，也会使卫星偏离秤动点的；因此我们需要进一步讨论人造卫星在秤动点附近的运动稳定性问题。

假设卫星与秤动点在向径、径度和纬度上的偏差分别是 Δ、θ 和 δ，则卫星在秤动点附近的解以及它对 τ 的一次和二次微商是

$$\left.\begin{array}{lll} r=r_0+\Delta, & \lambda_p=\lambda_0+\theta, & \varphi=\delta \\ r'=\Delta', & \lambda_p'=\theta', & \varphi'=\delta' \\ r''=\Delta'', & \lambda_p''=\theta'', & \varphi''=\delta'' \end{array}\right\}. \tag{7.246}$$

将 f、g 和 h 在秤动点处展开，利用 $f_0 = g_0 = h_0 = 0$ 和忽略偏差的二次幂及其以上项时有

$$
\left.\begin{aligned}
f &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0 \Delta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_0 \delta + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_p}\right)_0 \theta \\
g &= \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_0 \Delta + \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)_0 \delta + \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda_p}\right)_0 \theta \\
h &= \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_0 \Delta + \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)_0 \delta + \left(\frac{\partial h}{\partial \lambda_p}\right)_0 \theta
\end{aligned}\right\}。 \tag{7.247}
$$

其中足码“0”表示用秤动点处的值代入。

由(7.245)式很容易得到：

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0 = 1 + \frac{2\alpha}{r_0^3} + \frac{6\alpha J_2}{r_0^5} \pm \frac{6\alpha\beta}{r_0^5}, && \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_p}\right)_0 = 0 \\
&\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)_0 = -1 - \frac{\alpha}{r_0^5}(3J_2 \pm \beta), && \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda_p}\right)_0 = 0 \\
&\left(\frac{\partial h}{\partial \lambda_p}\right)_0 = \mp \frac{2\alpha\beta}{r_0^5}, && \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_0 = \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)_0 = 0
\end{aligned}\right\}。 \tag{7.248}
$$

将(7.248)式代入(7.247)式后，可得：

$$
\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & 0, & 0 \\ 0, & -c^2, & 0 \\ 0, & 0, & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \delta \\ \theta \end{pmatrix}。 \tag{7.249}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
a &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0 = 3 + \frac{3J_2}{r_0^2} \pm \frac{3\beta}{r_0^2} + O(J_2^2, J_2\beta) \approx 3 \\
b &= -\left(\frac{\partial h}{\partial \lambda_p}\right)_0 = \pm \frac{2\beta}{r_0^2} + O(J_2\beta) \\
c_1^2 &= -\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)_0 = 1 + \frac{3J_2}{r_0^2} \pm \frac{\beta}{r_0^2} + O(J_2^2, J_2\beta) \approx 1
\end{aligned}\right\}。 \tag{7.250}
$$

将(7.246)和(7.250)式代入(7.244)式，忽略偏差及其微商的二次幂和其以上项时可得偏差方程是：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta'' - a\Delta - 2r_0\theta' = 0\\&\theta'' + b\theta + \frac{2}{r_0}\Delta' = 0\\&\delta'' + c^2\delta = 0\end{aligned}\right\}. \tag{7.251}$$

(7.251)的第三式是振动方程，其解为

$$\delta = \delta_1\cos(c\tau) + \delta_2\sin(c\tau) \tag{7.252}$$

由(7.252)式可以看出卫星仅仅在赤道面附近作振动，而不会远离赤道面。由于 $\tau = n't$，故振动周期为 $\frac{2\pi}{cn'} \approx \frac{2\pi}{n'}$ 即一个恒星日。而 $\sin\varphi = \sin i\sin u$，故 $|\delta| = |\varphi| \leqslant i$，这说明其振幅不会超过卫星的轨道倾角.

(7.251)的第一和第二式是常系数线性齐次方程组，可以用消去法求解. 假设微分算子 D^n 表示 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\tau^n}$，我们将(7.251) 第二式对 τ 求二次导数。 其中 $D^3\Delta$ 用第一式对 τ 求一次导数代入，$D\Delta$ 仍用第二式代入，结果可得:

$$(D^4 + 2AD^2 + B)\theta = 0。 \tag{7.253}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&A = 2 + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3J_2}{r_0^2} \mp \frac{\beta}{r_0^2}\right) + O(J_2^2, J_2\beta) \approx \frac{1}{2}\\&B = -ab = \mp\frac{6\beta}{r_0^2} + O(J_2\beta)\end{aligned}\right\}. \tag{7.254}$$

(7.253)式的特征方程是 $\lambda^4 + 2A\lambda^2 + B = 0$，其特征根为

$$\lambda^2 = -A \pm \sqrt{A^2 - B}。 \tag{7.255}$$

由于 $A \gg B$，$\sqrt{A^2 - B} \approx A\left(1 - \frac{B}{2A^2}\right)$，于是(7.255)式化为

$$\lambda^2 = \begin{cases} -2A + \dfrac{B}{2A} \approx -1。\\ -\dfrac{B}{2A} \approx \pm\dfrac{6\beta}{r_0^2}。\end{cases} \tag{7.256}$$

式中正号相应于赤道长轴上的解，负号相应于赤道短轴上的解。

如果在(7.256)式中取正号，则解出四个特征根为

$$\lambda_1\approx i,\lambda_2\approx -i,\lambda_3\approx \frac{\sqrt{6\beta}}{r_0},\lambda_4\approx -\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}$$

相应 θ 的基解是：

$$\cos\tau,\quad \sin\tau,\quad e^{\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau},\quad e^{-\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau}$$

(7.251) 第一式对 τ 求一次微商后有 $\theta'''+b\theta'+\frac{2}{r_0}\Delta''=0$ 或者 $\Delta''=-\frac{r_0}{2}(\theta'''+b\theta')$，将它代入 (7.251) 第一式并利用 (7.250) 式，我们可以求出卫星在向径上的偏差是：

$$\Delta=\frac{1}{a}(\Delta''-2r_0\theta')=-\frac{r_0}{2a}(\theta'''+b\theta'+4\theta')$$

$$\approx -\frac{r_0}{6}(\theta'''+4\theta'). \tag{7.258}$$

从 (7.258) 式可以看出 Δ 的基解与 θ 的基解形式相同。当 $t\to\infty$ 时 $\tau\to\infty$，有 $\theta\to\infty$ 和 $\Delta\to\infty$。这说明对应于赤道长轴上的秤动点是不稳定的，只要卫星稍微偏离秤动点那么它会无限制地远离秤动点。

如果在(7.256)式中取负号，则解出四个特征根为

$$\lambda_1\approx i,\quad \lambda_2\approx -i,\quad \lambda_3\approx i\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0},\quad \lambda_4\approx -i\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}.$$

相应 θ 的基解是：

$$\cos\tau,\quad \sin\tau,\quad \cos\left(\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau\right),\quad \sin\left(\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau\right).$$

故得卫星在经度上的偏差是：

$$\theta=c_1\cos\tau+c_2\sin\tau+c_3\cos\left(\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau\right)+c_4\sin\left(\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau\right). \tag{7.259}$$

将(7.259)式代入(7.258)式后，可得卫星在向径上的偏差是：

$$\Delta \approx \frac{r_0}{2} c_1 \sin\tau - \frac{r_0}{2} c_2 \cos\tau + \sqrt{\frac{8\beta}{3}} c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau\right)$$
$$- \sqrt{\frac{8\beta}{3}} c_4 \cos\left(\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau\right). \qquad (7.260)$$

这里的 c_1、c_2、c_3、c_4 和 (7.252) 式中的 δ_1、δ_2 都是积分常数，它们可以根据初始条件来确定。

(7.252)、(7.259) 和 (7.260)式说明对应于赤道短轴上的秤动点是稳定的。当卫星稍微偏离赤道短轴上的秤动点时，它将会在这二个秤动点附近作周期振动。振动的周期有二种：一种是 $\frac{2\pi}{n'}$，为 1 恒星日，称为短周期变化；另一种是 $\frac{2\pi r_0}{n'\sqrt{6\beta}}$，约为 2 年，称为长周期变化。因此卫星的纬度偏差是短周期的，而经度和向径的偏差有短周期和长周期二种。

为了估计一下这种周期变化的振幅有多大，我们可以取一组初始条件：将卫星准确地发射到稳定的秤动点处而仅仅在经度上略有偏差（事实上地球赤道短轴在赤道面上的方向并不能准确确定），即在 $\tau = 0$ 时，$\theta = \theta_0, \theta_0' = \Delta_0 = \Delta_0' = 0$。将这组初始条件代入(7.259)和(7.260)式后，我们可得：

$$\left.\begin{aligned} &c_1 + c_3 = \theta_0, \qquad && \frac{r_0}{2}c_1 + \frac{4\beta}{r_0}c_3 = 0 \\ &c_2 + \frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}c_4 = 0, \qquad && \frac{r_0}{2}c_2 + \sqrt{\frac{8\beta}{3}}\, c_4 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (7.261)$$

由(7.261)式，很容易求出 $c_1 = -\frac{8\beta}{r_0^2}\left(1 - \frac{8\beta}{r_0^2}\right)^{-1}\theta_0 \approx -\frac{8\beta}{r_0^2}\theta_0$，$c_3 = \left(1 + \frac{8\beta}{r_0^2}\right)\theta_0 \approx \theta_0, c_2 = c_4 = 0$。将它们代入(7.259)和(7.260)式后，可得：

$$\left.\begin{aligned} \theta &= -\frac{8\beta}{r_0^2}\theta_0 \cos\tau + \theta_0 \cos\left(\frac{\sqrt{6\beta}\tau}{r_0}\right) \\ \Delta &= -\frac{4\beta}{r_0}\theta_0 \sin\tau + \sqrt{\frac{8\beta}{3}}\theta_0 \sin\left(\frac{\sqrt{6\beta}}{r_0}\tau\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (7.262)$$

由(7.262)式可以看到:

(1) 长周期变化的振幅比短周期变化的振幅要大得多。对于经度偏差,它们之比为$\frac{r_0^2}{8\beta} = 4.5 \times 10^5$;对于向径偏差,它们之比为$\frac{r_0}{\sqrt{6\beta}} = 7.8 \times 10^2$。因此起主要影响的是长周期变化。

(2) 在长周期变化中,经度偏差的振幅比向径偏差的振幅要大得多,它们之比为$\sqrt{\frac{3}{8\beta}} = 177$。经度偏差的振幅主要取决于它的初始偏差 θ_0。因此地球引力场位函数中田谐项(即经度项)的影响主要反映在经度偏差上。

由上面讨论说明如果把卫星发射到地球赤道短轴上的秤动点处而偏离不大的话,它将会稳定地在秤动点附近运动,可以用来作为通讯工具。

第八章　正则变换理论和中间轨道理论

采用分析方法来研究天体的运动是天体力学的基本内容之一。正则变换理论和中间轨道理论是天体力学分析方法中二个重要的内容。

正则变换理论是研究当进行变量变换时天体的运动方程仍然保持正则形式的一种理论。通过正则变换，能够使运动方程出现越来越多的循环积分，最后变为一种完全可积的形式。中间轨道理论是研究一些比二体问题更接近于真实情况的轨道模型的一种理论。选择一些中间轨道使它们最接近所研究的真实情况而又是完全可积的。正则变换理论和中间轨道理论不仅在理论研究中具有重要的意义，而且在解决实际问题上也有广泛的应用。

本章主要介绍正则变换的充要条件，天体力学中常用的正则变量，德洛勒-柴倍尔 (Delaunay-Zeipel) 变换和李(Lie)变换；中间轨道和二个不动中心问题，斯特恩 (Sterne) 型中间轨道，文梯(Vinti)型和阿克谢诺夫(Аксёнов)型中间轨道等。作为实际应用，本章还利用所介绍的正则变换理论和中间轨道理论来研究人造卫星在地球引力场中的运动情况。

§1　正则方程和正则变换

一个质点在空间中的位置可以用直角坐标表示也可以用其它曲面坐标来表示。例如第一章所提到的球面坐标，柱面坐标或者椭球坐标。在讨论刚体转动时，我们采用欧拉(Euler)角会更方便些。因此在实际运用中，我们往往引入一种抽象的坐标，它可以是长度，也可以是角度。我们称它为广义坐标，用 q 来表示。相应的速度称为广义速度，用 $\dot{q}$ 来表示。广义坐标 q 组成的空间称为构

形空间。如果这个系统有 n 个自由度，则 q_i 和 $\dot{q}_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 完全确定了这个系统的运动。

在物理上常常利用动量代替速度。于是引入广义动量 p_i 来代替 $\dot{q}_i$，它的定义是 $p_i=\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$，其中 T 是系统的动能。广义动量所组成的空间称为动量空间。由 q_i 和 p_i 合成的空间称为相空间。在这 $2n$ 维相空间中的一点 $x=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ 表示某瞬时这个力学系统的运动状态，称为代表点。

在分析力学中，由拉格朗日方程或者哈密顿 (Hamilton) 原理可以得到 q 和 p 所满足的方程是:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.\qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)\quad (8.1)$$

其中 $H=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i-(T+U)=H(q,p,t)\in c^{(1)}$。$c^{(\nu)}$ 表示函数对其自变量存在有一阶到 ν 阶的连续偏导数，通常称为 $c^{(\nu)}$ 类。U 是这个系统的力函数。方程式 (8.1) 是 1834 年由哈密顿得到的，形式简单而又对称通常称为哈密顿正则方程或简称正则方程。q 和 p 称为正则共轭变量，H 称为哈密顿函数。

如果 $x=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ 表示 $2n$ 维相空间中一个 $2n$ 维向量，哈密顿函数 $H(x,t)\in c^{(1)}$ 是一个标量，则正则方程(8.1)式可以写为

$$\dot{x}+IH_x=0.$$

其中 H_x 是 $2n$ 维向量

$$H_x=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial H}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial H}{\partial x_{2n}}\end{pmatrix}. \qquad (8.3)$$

I 是 $2n$ 阶方阵

$$I=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}. \qquad (8.4)$$

这里E是n阶单位矩阵. 由(8.4)式显然有 $I^{\tau}=I^{-1}=-I$ 或者写为

$$I^{\tau}I=E, \qquad II=-E. \tag{8.5}$$

这里 I^{τ} 和 I^{-1} 表示I的转置矩阵和逆矩阵， E是$2n$阶单位矩阵. 另外还有

$$\det I=1. \tag{8.6}$$

式中 $\det I$ 表示I的行列式.

如果哈密顿函数H不包含某一广义坐标 q_i，这时由(8.1)式可得方程存在一个积分 $p_i=\text{const}$. 使运动方程降一阶. 这个坐标称为循环坐标或者可遗坐标,这个积分称为循环积分.如果循环坐标越多则出现循环积分越多,方程降的阶数也越多. 当 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$都成循环坐标时,方程能够完全积分,结果是:

$$p_i=p_{i0},\ q_i=q_{i0}+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H(p_i,t)}{\partial p_i}\bigg|_{p_i=p_{i0}}dt \tag{8.7}$$

其中积分常数 q_{i0},p_{i0} 是初始时刻t_0时的值.

上述过程可以通过变量变换来实现，但是要求经过变换后的运动方程仍然具有正则形式,这种变换称为正则变换.

我们进行变量变换，设变换后的广义坐标和广义动量分别是Q和P，有

$$\left.\begin{aligned}Q_i=Q_i(q_1,\cdots\cdots q_n,p_1\cdots\cdots p_n,t)\\P_i=P_i(q_1,\cdots\cdots q_n,p_1\cdots\cdots p_n,t)\end{aligned}(i=1,2,\cdots\cdots n)\right\}. \tag{8.8}$$

Q_i 和P_i 构成这$2n$维相空间中另一个代表点,可用$y=\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$来表示. 这时(8.8)式也可写为

$$y=y(x,t). \tag{8.9}$$

有 $y(x,t)\in c^{(2)}$, 则通过(8.9)式变换后的新的正则方程应是:

$$\dot{y}+IK_y=0. \tag{8.10}$$

其中 $K=K(y,t)\in c^{(1)}$ 是新的哈密顿函数， 经过变换后可能使它不包含某个坐标 Q_i.

§2 正则变换的充要条件和常用的正则变量

定理： 在 $2n$ 维向空间和时间构成的 $2n+1$ 维空间的某一区域中，向量函数 $y=y(x,t)$ 及其反函数（逆变换）$x=x(y,t)$ $\in c^{(2)}$，并且函数行列式 $\det\Gamma\neq 0$，这里 $\Gamma=y_x=\dfrac{D(y_1,\cdots y_{2n})}{D(x_1,\cdots x_{2n})}$ 是变换矩阵或称雅可比矩阵．那么 $y=y(x,t),x=x(y,t)$ 是正则变换的充要条件在 $2n+1$ 维空间的某区域中，存在一个标量常数 μ 使得：

$$\Gamma I\Gamma^{\tau}=\Gamma^{\tau}I\Gamma=\mu I。\tag{8.11}$$

其中 $|\mu|=|\det\Gamma|^{1/n}$，μ 称为正则变换的乘子．这时新的哈密顿函数：

$$K=\mu H+R。\tag{8.12}$$

这里 $R=R(y,t)\in c^{(2)}$ 是一个标量函数，它称为余函数，有

$$R_y=Iy_t。\tag{8.13}$$

证明：由于 $y=y(x,t)$ 故有

$$\dot{y}=y_x\dot{x}+y_t=\Gamma\dot{x}+y_t,\tag{8.14}$$

$\det\Gamma\neq 0$，则 Γ^{-1} 存在。利用(8.5)式，由(8.4)式可得：

$$\dot{x}=\Gamma^{-1}(\dot{y}-y_t)=\Gamma^{-1}(\dot{y}+IIy_t)。\tag{8.15}$$

正则变换后 $H(x,t)\to H(y,t)$，于是由(8.3)式有

$$H_x^{\tau}=H_y^{\tau}y_x=H_y^{\tau}\Gamma。\tag{8.16}$$

利用线性代数知识可将(8.16)式两边转置后化为

$$H_x=\Gamma^{\tau}H_y。\tag{8.17}$$

将(8.15)和(8.17)式代入(8.2)式后有

$$\dot{x}+IH_x=\Gamma^{-1}(\dot{y}+IIy_t+II^{-1}\Gamma I\Gamma^{\tau}H_y)。\tag{8.18}$$

若(8.11)式成立，则(8.18)式化为

$$\begin{aligned}\dot{x}+IH_x&=\Gamma^{-1}(\dot{y}+IIy_t+II^{-1}\mu IH_y)\\&=\Gamma^{-1}(\dot{y}+IIy_t+I\mu H_y)。\end{aligned}\tag{8.19}$$

式中 μ 是与 x、y、t 无关的常数。

由于 $K = \mu H + R$，故 $K_y = \mu H_y + R_y = \mu H_y + I y_t$，将它们代入(8.19)式后有：

$$\dot{x} + I H_x = \Gamma^{-1}(\dot{y} + I K_y) = 0. \tag{8.20}$$

(8.20)式可以认为是关于 $\dot{y} + IK_y$ 的 $2n$ 个线性齐次方程，其系数行列式 $\det\Gamma^{-1} \neq 0$，故只有零解得：

$$\dot{y} + IK_y = 0. \tag{8.21}$$

(8.21)式说明变换后方程仍保持正则形式，因此(8.11)式的条件是充分的。

反之，如果变换是正则的，这意味着(8.13)式成立即 $R_y = Iy_t$。由于 $R_{yy} = \dfrac{\partial^2 R}{\partial y_i \partial y_j} = \dfrac{\partial^2 R}{\partial y_j \partial y_i} = R_{yy}^{\tau}, (i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$是一个 $2n$ 阶的对称矩阵，故有：

$$(Iy_t)_y = (Iy_t)_y^{\tau}. \tag{8.22}$$

但是 x 和 t 也互为独立，对他们的偏导可互易故有

$$\Gamma_t = (y_x)_t = (y_t)_x = (y_t)_y y_x = (y_t)_y \Gamma. \tag{8.23}$$

由(8.23)式可得：

$$(y_t)_y = \Gamma_t \Gamma^{-1}. \tag{8.24}$$

而 $(Iy_t)_y = I(y_t)_y = I\Gamma_t\Gamma^{-1}$，利用(8.22)式得到：

$$I\Gamma_t\Gamma^{-1} = (I\Gamma_t\Gamma^{-1})^{\tau} \tag{8.25}$$

但 $(\Gamma^{-1})^{\tau} = (\Gamma^{\tau})^{-1}, I^{\tau} = -I$，故(8.25)式成为

$$I\Gamma_t\Gamma^{-1} = (\Gamma^{\tau})^{-1}\Gamma_t^{\tau} I^{\tau} = -(\Gamma^{\tau})^{-1}\Gamma_t^{\tau} I \tag{8.26}$$

将(8.26)式两边前后分别乘 Γ^{τ} 和 Γ，则可得 $\Gamma^{\tau} I \Gamma_t + \Gamma_t^{\tau} I \Gamma = 0$ 或者是：

$$(\Gamma^{\tau} I \Gamma)_t = 0. \tag{8.27}$$

(8.27) 式说明 $\Gamma^{\tau} I \Gamma$ 是常数矩阵。不难证明 $\Gamma^{\tau} I \Gamma$ 可以写为形式 $\mu(t) I$，由此可得 $\mu(t) =$ 常数。这就意味着存在一个常数标量 μ 使得 (8.11) 式成立。它说明该条件是必要的。

将(8.11)式两边取行列式可得：

$$\det\Gamma \det I \det\Gamma^{\tau} = \det(\mu I). \tag{8.28}$$

对于常数和 $2n$ 阶方阵 I 有 $\det(\mu I) = \mu^{2n}\det I$，而 $\det\Gamma^{\tau} = \det\Gamma$，

将它们代入(8.28)式并利用(8.6)式可得:

$$\mu^{2n} = (\det\Gamma)^2 \text{ 或者 } |\mu| = |\det\Gamma|^{\frac{1}{n}}. \tag{8.29}$$

正则变换的充要条件(8.11)式在实际使用中不太方便，我们往往利用泊松(Poisson)括号和拉格朗日括号来表示。

设$x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$和$y = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$是 $2n$ 维相空间中的二点。y_l 和 y_m 是 y 的第 l 和第 m 个分量，$l、m = 1,2,\cdots 2n$. 我们有:

$$(y_l)_x = \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_i}, \frac{\partial y_l}{\partial x_{i+n}}\right). \quad (i = 1,2,\cdots n) \tag{8.30}$$

于是

$$I(y_m)_x^T = \begin{pmatrix} 0, & E \\ \\ -E, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_{i+n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_m}{\partial x_{i+n}} \\ -\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}. \tag{8.31}$$

将(8.30)和(8.31)式相乘可得:

$$(y_l)_x I(y_m)_x^T = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_{i+n}} - \frac{\partial y_l}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}\right). \tag{8.32}$$

习惯用的泊松括号定义为

$$\{y_l, y_m\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y_l}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} - \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_{i+n}}\right). \tag{8.33}$$

于是由(8.32)和(8.33)式有 $\{y_l, y_m\} = -(y_l)_x I(y_m)_x^T$ 或者

$$(\{y_l, y_m\}) = -y_x I y_x^T = -\Gamma I \Gamma^T. \tag{8.34}$$

将正则变换充要条件(8.11)式代入(8.34)式后可得:

$$(\{y_l, y_m\}) = -\mu I, \quad (l, m = 1,2,\cdots\cdots 2n) \tag{8.35}$$

或者

$$(\{y_l, y_m\}) = \begin{pmatrix} \{P_i, P_j\}, & \{P_i, Q_j\} \\ \{Q_i, P_j\}, & \{Q_i, Q_j\} \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} 0, & -E \\ E, & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(i, j = 1,2,\cdots\cdots n) \tag{8.36}$$

由(8.36)式有

$(\{P_i, P_j\}) = (\{Q_i, Q_j\}) = 0$, $(\{Q_i, P_j\}) = -(\{P_i, Q_j\}) = \mu E$, 因此正则变换的充要条件是泊松括号必须满足:

$$\{P_i,P_j\}=\{Q_i,Q_j\}=0,\{Q_i,P_j\}=-\{P_i,Q_j\}=\mu\delta_{ij}.$$
$$(i,j=1,2,\cdots\cdots n) \tag{8.37}$$
由(8.33)式知(8.37)式中的
$$\{Q_i,P_j\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}-\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right) \tag{8.38}$$
$\{P_i,P_j\}$、$\{Q_i,Q_j\}$和$\{P_i,Q_j\}$类似.

如果将 x 和 y 互换一下，上面推算也成立，这时(8.37)式变为：
$$\{p_i,p_j\}=\{q_i,q_j\}=0,\{q_i,p_j\}=-\{p_i,q_j\}=\mu\delta_{ij}.$$
$$(i,j=1,2,\cdots\cdots n) \tag{8.39}$$
其中$\{q_i,p_j\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\frac{\partial p_j}{\partial P_k}-\frac{\partial q_i}{\partial P_k}\frac{\partial p_j}{\partial Q_k}\right)$；$\{p_i,p_j\}$，$\{q_i,q_j\}$ 和 $\{p_i,q_j\}$ 也类似.

同样
$$x_{y_l}=\frac{\partial x}{\partial y_l}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_l}\\[2mm]\dfrac{\partial x_{i+n}}{\partial y_l}\end{pmatrix},\quad (i=1,2,\cdots\cdots n) \tag{8.40}$$
有
$$x_{y_l}^{\tau}Ix_{y_m}=\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_l}\ \frac{\partial x_{i+n}}{\partial y_l}\right)\begin{pmatrix}0, & E\\ -E, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_m}\\[2mm]\dfrac{\partial x_{i+n}}{\partial y_m}\end{pmatrix}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_l}\frac{\partial x_{i+n}}{\partial y_m}-\frac{\partial x_i}{\partial y_m}\frac{\partial x_{i+n}}{\partial y_l}\right). \tag{8.41}$$
习惯用的拉格朗日括号定义为
$$[y_l,y_m]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_{i+n}}{\partial x_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_m}-\frac{\partial x_{i+n}}{\partial y_m}\frac{\partial x_i}{\partial y_l}\right). \tag{8.42}$$
于是由(8.41)式有
$$[y_l,y_m]=-x_{y_l}^{\tau}Ix_{y_m} \tag{8.43}$$
我们知道 $y_y=y_xx_y=\Gamma x_y=E$，故 $x_y=\Gamma^{-1}$，于是由(8.43)式得到：
$$([y_l,y_m])=-x_y^{\tau}Ix_y=-(\Gamma^{-1})^{\tau}I\Gamma^{-1}=(\Gamma^{\tau})^{-1}I^{-1}\Gamma^{-1}$$

$$= (\Gamma I \Gamma^{\tau})^{-1} = -[(\Gamma I \Gamma^{\tau})^{\tau}]^{-1}. \tag{8.44}$$

比较(8.34)和(8.44)式可以得出以泊松括号为元素的矩阵与以拉格朗日括号为元素的矩阵之间关系，它们是互为转置逆矩阵.

将正则变换充要条件(8.11)式代入(8.44)式后可得:

$$([y_l, y_m]) = -(\mu I^{\tau})^{-1} = -\mu^{-1} I. \quad (l, m = 1, 2, \cdots 2n) \tag{8.45}$$

因此类似(8.35)式可得这时拉格朗日括号必须满足

$$[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = 0, [Q_i, P_j] = -[P_i, Q_j] = \mu^{-1}\delta_{ij}.$$
$$(i, j = 1, 2, \cdots\cdots n) \tag{8.46}$$

这里

$$[Q_i, P_j] = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\frac{\partial p_k}{\partial P_j} - \frac{\partial q_k}{\partial P_j}\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\right) \tag{8.47}$$

$[P_i, P_j]$、$[Q_i, Q_j]$ 和 $[P_i, Q_j]$ 类似.

如果进行二次正则变换 $y = y(x, t), x = x(y, t) \in c^{(2)}$，若它们的变换矩阵，乘子和余函数分别是 Γ_1、μ_1、R_1 和 Γ_2、μ_2、R_2，则不难得到二次变换的变换矩阵、乘子和余函数为

$$\Gamma = \Gamma_2\Gamma_1, \ \mu = \mu_1\mu_2, \ R = \mu_2 R_1 + R_2 \tag{8.48}$$

如果第二次变换是逆变换即 $x = x(y, t)$，则显然有 $\Gamma_2 = \Gamma_1^{-1}, \mu_2 = \mu_1^{-1}$，$R_2 = -\mu_1^{-1} R_1$，代入(8.48)式结果是 $\Gamma = E, \mu = 1, R = 0$，哈密顿函数 $K = H$ 即不变，这就是 $y = x$ 的恒等变换.

若以正则变量为集合中的元，以二次正则变换为集合的运算(称为乘法)，由于正则变换后变量仍为正则，可以连续施行正则变换且有恒等变换和逆变换存在，因此一力学系统的正则方程式的所有一切正则变换可以构成一个变换群.

当变换乘子 $\mu = 1$ 即 $\det\Gamma = 1$ 时，这种正则变换称为接触变换.天体力学上所用的主要是接触变换，它作为正则变换的一部分构成它的子群. 接触变换后的新的哈密顿函数 $K = H + R$.

如果变量变换中不显含 t 即 $y = y(x), x = x(y)$. 这时 $y_t = 0$，余函数 $R = 0$，故 $K = \mu H$. 我们称这样的正则变换为保守正则变换. 若又有 $\mu = 1$，这时 $K = H$ 即哈密顿函数保持不

变，这种接触变换称为完全正则变换.

另外，接触变换的充要条件还可以表示为

$$\iint_{s}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i=\iint_{s}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}Q_j\mathrm{d}P_j. \tag{8.49}$$

积分是对相空间 $x=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$中所有二维面 S 进行的. (8.49) 式称为邦加雷-卡当(Poincaré-Cartan)积分不变式。

相空间中的变换参数群:

$$g^t:\begin{pmatrix}p(0)\\q(0)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}p(t)\\q(t)\end{pmatrix}$$

定义为相流. 这里 $p(t)$, $q(t)$ 满足 (8.1) 式. 这样 (8.49) 式表示 $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i$ 是相流的一个绝对积分不变式. 如果 $n=1$, 则 $2n$ 维相空间变为相平面，这样就得到刘维尔(Liouville)定理：相流是保积的，这意味着相平面中任一区域 D 有 g^tD 的面积等于 D 的面积，如图 8.1 所示.

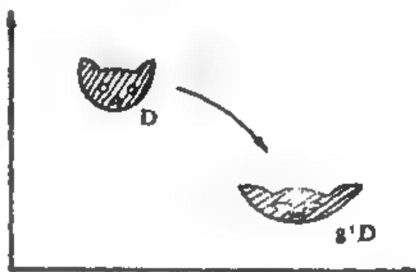


图 8-1

根据分析力学知识知道正则变换可以通过寻找合适的母函数(或称生成函数)来进行. 如果选取的母函数适当，使它所确定的正则变换在变换后有较多的循环坐标，那么通过 n 次正则变换就有可能使方程完全积分得出象(8.7)式那样. 由 (8.8) 式知道在四组变量 q、p、Q 和 P 中，仅有二组是独立的. 我们以不同的变量作为独立变量，那么母函数形式及由其所确定的正则变换也就不同，于是它们可以分为下列四种形式。

(1) 以 q 和 Q 为独立变量.

若存在一个数量函数 $S(q,Q,t)\in c^{(2)}$, 且矩阵 S_{qQ} 非异即 S 对 q,Q 的海赛(Hesse)行列式 $\det(S_{qQ})\neq 0$, 则 $2n$ 维相空间

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$的变换

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q,Q,t), P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} = P_i(q,Q,t).$$

$$(i = 1,2,\cdots n) \tag{8.50}$$

是一个正则变换．它的乘子 $\mu = 1$，余函数 $R = \frac{\partial S}{\partial t}$，故新哈密顿函数为 $K = H + \frac{\partial S}{\partial t}$。

(2) 以 q 和 P 为独立变量．

若有 $S(q,P,t) \in c^{(2)}$，且 $\det(S_{qP}) \neq 0$，则由

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q,P,t),\ Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = Q_i(q,P,t)$$

$$(i = 1,2,\cdots,n) \tag{8.51}$$

所确定的变换是一个正则变换，它的 $\mu = 1$，$R = \frac{\partial S}{\partial t}$，$K = H + \frac{\partial S}{\partial t}$。

作为特例，若取 $K = 0$ 即 $y = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ 是 $2n$ 维向空间中的一个常向量$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$，则(8.51)式成为

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},\ \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} (i = 1,2,\cdots n) \tag{8.52}$$

另外有

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \tag{8.53}$$

(8.53)式就是哈密顿-雅可比方程。

(3) 以 p 和 Q 为独立变量。

若有 $S(p,Q,t) \in c^{(2)}$，且 $\det(S_{pQ}) \neq 0$，则由

$$q_i = -\frac{\partial S}{\partial p_i} = q_i(p,Q,t), P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} = P_i(p,Q,t).$$

$$(i = 1,2,\cdots,n) \tag{8.54}$$

所确定的变换是一个正则变换，它的 $\mu=1$，$R=\frac{\partial S}{\partial t}$，$K=H+\frac{\partial S}{\partial t}$.

(4) 以 p 和 P 为独立变量.

若有 $S(p,P,t)\in c^{(2)}$，且 $\det(S_{pP})\neq 0$，则由

$$q_i=-\frac{\partial S}{\partial p_i}(p,P,t),\ Q=\frac{\partial S}{\partial P_i}=Q_i(p,P,t).$$
$$(i=1,2,\cdots,n) \tag{8.55}$$

所确定的变换是一个正则变换，它的 $\mu=1$，$R=\frac{\partial S}{\partial t}$，$K=H+\frac{\partial S}{\partial t}$.

对于不同的问题，可以选择这四种正则变换形式中的一种.显然在这四种正则变换中，新、旧变量之间关系都呈隐函数形式. 如果新旧变量变换中不显含 t 即为保守变换，则母函数 S 也不显含 t，有 $K=H$.

在天体力学中常用的有下列几组正则变量.

(1) 德洛勒变量.

德洛勒在研究月球运动理论时首先采用了一组正则变量，它与轨道根数之间关系为

$$\left.\begin{aligned}&L=\sqrt{\mu a},\ G=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\\&H=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i\\&l=M=n(t-\tau),\ g=\omega,\ h=\Omega\end{aligned}\right\}, \tag{8.56}$$

这时运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l},\ \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g},\ \frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h}\\&\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L},\ \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G},\ \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}\end{aligned}\right\}. \tag{8.57}$$

其中哈密顿函数

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}+R. \tag{8.58}$$

式中 R 为摄动函数，$\mu = G(M_1 + M_2)$，M_1 和 M_2 为这二个天体的质量.

(2) 庞加来变量.

为了简化摄动函数的展开式,庞加来提出了一组正则变量,这组变量只有一个角度,它是

$$\left.\begin{aligned} &L, \quad \xi = \sqrt{2(L-G)}\sin(g+h) \\ &\qquad p = \sqrt{2(G-H)}\sin h \\ &\lambda = l + g + h, \eta = \sqrt{2(L-G)}\cos(g+h) \\ &\qquad q = \sqrt{2(G-H)}\cos h \end{aligned}\right\}, \tag{8.59}$$

这时运动方程为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \\ &\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p} \end{aligned}\right\}. \tag{8.60}$$

其中哈密顿函数仍是

$$F = \frac{\mu^2}{2L} + R, \tag{8.61}$$

式中 R 为摄动函数

(3) 无奇点德洛勒型变量.

我们知道在摄动运动方程中,具有 $e = 0$, $i = 0$ 和 $i = \pi$ 的奇点. 1962 年科亨(Cohen)等提出一组无奇点的变量,它是

$$\left.\begin{aligned} &q_0 = p^{1/4}\cos\frac{1}{2}i\cos\frac{1}{2}(\Omega + \omega + M) \\ &q_1 = p^{1/4}\sin\frac{1}{2}i\cos\frac{1}{2}(\Omega - \omega - M) \\ &q_2 = p^{1/4}\sin\frac{1}{2}i\sin\frac{1}{2}(\Omega - \omega - M) \\ &q_3 = p^{1/4}\cos\frac{1}{2}i\sin\frac{1}{2}(\Omega + \omega + M) \\ &e_x = e\cos M \\ &e_y = -e\sin M \end{aligned}\right\}. \tag{8.62}$$

其中 $p=a(1-e^2)$。

另外，他们还给出了一组德洛勒变量引出来的无奇点德洛勒型正则变量，它是

$$\xi_j=2Z_j^{1/2}\cos\frac{1}{2}z_j,\ \eta_j=2Z_j^{1/2}\sin\frac{1}{2}z_j\quad(j=1,2,3)\tag{8.63}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&Z_1=\frac{1}{2}(G+H),\quad Z_2=\frac{1}{2}(G-H)\\&Z_3=\frac{1}{2}(L-G)\quad z_1=l+g+h\\&z_2=l+g-h,\quad z_3=2l\end{aligned}\right\},\tag{8.64}$$

无奇点德洛勒型正则变量(8.63)和(8.64)式实际上是由无奇点变量(8.62)式变换过来的。它们之间的关系是

$$\left.\begin{aligned}&\xi_1=2\mu^{1/4}q_0 &&\eta_1=2\mu^{1/4}q_3\\&\xi_2=2\mu^{1/4}q_1 &&\eta_2=-2\mu^{1/4}q_2\\&\xi_3=\frac{2(\mu a)^{1/4}}{(1+\sqrt{1-e^2})^{1/2}}e_x &&\eta_3=\frac{2(\mu a)^{1/4}}{(1+\sqrt{1-e^2})^{1/2}}e_y\end{aligned}\right\}.\tag{8.65}$$

§3 德洛勒-柴倍耳变换

1. 基本原理

由上节我们可以看出通过正则变换能出现循环坐标使运动方程降阶，最后得到完全积分(8.7)式。1916年冯·柴倍耳(Von Zeipel)在研究月球运动理论时提出一种变换：它以德洛勒变量为正则变量，采用形式为(8.51)式的正则变换，通常称为德洛勒-柴倍耳变换。1959年勃劳威尔(Brouwer)利用德洛勒-柴倍耳变换来讨论人造卫星在地球引力场中的运动，得出卫星运动的一阶理论。

若取地球引力场位函数的模型是(1.51)式，则由(8.58)式可得这时的哈密顿函数为

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}-\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^nJ_nP_n(\sin\varphi).\tag{8.66}$$

式中 $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$， $\sin\varphi=\sin i\sin(f+g)$；$a$、$e$、$i$ 和 L、G、H 的关系为(8.56)式；f 仅与 l 和 e 有关.

由(8.66)式知 h 是一个循环坐标，如果通过二次正则变换依次使新的哈密顿函数不再含 l 和 g，这时所有的广义坐标都成为循环坐标，于是运动方程就得到完全积分. 由于 $l=M$，$g=\omega$，它们是以三角函数形式出现. 包含它们的项，我们分别称为短周期项和长周期项. 因此这样做法实质上是通过正则变换依次消去短周期项和长周期项，在求解的过程中得出短周期项，长周期项和长期项.

2. 第一次正则变换(消去 l)。

为了方便起见，在求解过程中我们采用理论单位制即适选长度、质量和时间单位使 $\mu=1$。

在人造卫星运动理论中，以地球赤道平均半径 $a_e=6378.160$ 公里，地球质量 $M(\mu=GM=398603$ 公里^3/秒$^2)$，806.813 或 13.4469 分钟分别为长度，质量和时间单位. 这时(8.56)式变为

$$\left.\begin{aligned}&L=\sqrt{a},\quad G=\sqrt{a(1-e^2)}\\&H=\sqrt{a(1-e^2)}\cos i\\&g=\omega,\quad l=M,\quad h=\Omega\end{aligned}\right\}\qquad(8.67)$$

(8.66)式变为

$$F=F_0+F_1+\Delta F. \qquad (8.68)$$

其中

$$F_0=\frac{1}{2L^2}, \qquad (8.69)$$

$$F_1=-\frac{J_2}{r^3}P_2(\sin\varphi)=\frac{J_2}{2a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3(1-3\sin^2\varphi), \qquad (8.70)$$

$$\Delta F=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{J_n}{r^{n+1}}P_n(\sin\varphi), \qquad (8.71)$$

本节先考虑 J_2 项的摄动，故在(8.68)式中可令 $\Delta F=0$.

由(8.70)式知 F_1 中有短周期项和常数项两部分，我们先把

它们分离开，并分别用 F_{1s} 和 F_{1c} 来表示。对 F_1 求平均值 $\bar{F}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(M)\mathrm{d}M$，利用二体问题公式 $\mathrm{d}M = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}f$，$\frac{a}{r} = \frac{1+e\cos f}{1-e^2}$ 和 $\sin^2\varphi = \sin^2 i\sin^2(f+g) = \frac{1}{2}\sin^2 i[1-\cos 2(f+g)]$ 可得：

$$
\begin{aligned}
F_{1c} = \bar{F}_1 &= \frac{J_2}{2a^3}(1-e^2)^{-3/2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right) \\
&= \frac{J_2}{2a^3}(1-e^2)^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 i\right) \\
&= \frac{J_2 A}{2L^6}\left(\frac{L}{G}\right)^3,
\end{aligned}
\tag{8.72}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{1s} = F_1 - F_{1c} &= \frac{J_2}{2a^3}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 i\cos 2(f+g)\right]\right\} \\
&= \frac{J_2}{2L^6}(A\sigma_1 + B\sigma_2),
\end{aligned}
\tag{8.73}
$$

式中

$$
A = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H^2}{G^2}, \qquad B = \frac{3}{2}\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right) \tag{8.74}
$$

和

$$
\sigma_1 = \left(\frac{a}{r}\right)^3 - \left(\frac{L}{G}\right)^3, \quad \sigma_2 = \left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+g), \tag{8.75}
$$

它们分别是与 l 无关的常数项和与 l 有关的短周期项。

若令

$$
\sigma_1^* = \left(\frac{a}{r}\right)^3 = \sigma_1 + \left(\frac{L}{G}\right)^3. \tag{8.76}
$$

则由(8.72)、(8.73)和(8.76)式有：

$$
F_1 = F_{1c} + F_{1s} = \frac{J_2}{2L^6}(A\sigma_1^* + B\sigma_2) \tag{8.77}
$$

我们在 6 维相空间中作正则变换$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$,这时 $p=(L,G,H)$, $q=(l,g,h)$ 和 $P=(L',G',H')$, $Q=(l',g',h')$. 由于变换是保守的,这时母函数也不显含 t. 根据(8.51)式, 我们要寻找一个母函数 $S=S(L',G',H',l,g,h)$, 使得:

$$\left.\begin{aligned} L&=\frac{\partial S}{\partial l}, \quad G=\frac{\partial S}{\partial g}, \quad H=\frac{\partial S}{\partial h} \\ l'&=\frac{\partial S}{\partial L'}, \quad g'=\frac{\partial S}{\partial G'}, \quad h'=\frac{\partial S}{\partial H'} \end{aligned}\right\}. \tag{8.78}$$

所确定的正则变换所给出的新哈密顿函数 F^* 不仅不含 h' 而且不含 l', 这样使 l' 也成为循环坐标即:

$$F^*=F^*(L',G',H',g').$$

我们可将哈密顿函数和母函数按 J_2 的幂次展开:

$$F^*=F_0^*+F_1^*+F_2^*+O(J_2^3). \tag{8.79}$$

$$S=S_0+S_1+S_2+O(J_2^3). \tag{8.80}$$

其中 S_0 相当于无摄运动,本身是可积的,因此它所对应的是恒等变换即有:

$$S_0=L'l+G'g+H'h. \tag{8.81}$$

S_1 和 S_2 表示 J_2 的一次和二次幂项, 它们由 F_1 所引起故不含 h. 将(8.80)和(8.81)式代入(8.78)式后,可得新、旧变量间关系是:

$$\left.\begin{aligned} L&=L'+\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial S_2}{\partial l}+O(J_2^3) \\ G&=G'+\frac{\partial S_1}{\partial g}+\frac{\partial S_2}{\partial g}+O(J_2^3) \\ H&=H' \\ l'&=l+\frac{\partial S_1}{\partial L'}+\frac{\partial S_2}{\partial L'}+O(J_2^3) \\ g'&=g+\frac{\partial S_1}{\partial G'}+\frac{\partial S_2}{\partial G'}+O(J_2^3) \\ h'&=h+\frac{\partial S_1}{\partial H'}+\frac{\partial S_2}{\partial H'}+O(J_2^3) \end{aligned}\right\}. \tag{8.82}$$

由于 S 不显含 t 即 $\frac{\partial S}{\partial t}=0$，故哈密顿函数保持不变，有

$$F^*(L',G',H',g')=F(L,G,H,l,g). \qquad (8.83)$$

下面利用(8.82)和(8.83)式逐步求出母函数 S，新哈密顿函数 F^* 和新、旧变量之间关系。

我们将(8.68)和(8.79)式代入(8.83)式，将其两边在变量 L'、G'、H' 和 l、g 处展开。利用(8.82)式并考虑到 F_0 只含 L 和 $H=H'$，可得：

$$\begin{aligned}F_0^* &+ \frac{\partial F_0^*}{\partial g}\left(\frac{\partial S_1}{\partial G'}+\frac{\partial S_2}{\partial G'}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0^*}{\partial g^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial G'}+\frac{\partial S_2}{\partial G'}\right)^2\\ &+F_1^*+\frac{\partial F_1^*}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G'}+F_2^*\\ =F_0&+\frac{\partial F_0}{\partial L'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial S_2}{\partial l}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2+F_1\\ &+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}+O(J_2^3).\end{aligned} \qquad (8.84)$$

式中 $\frac{\partial F_0^*}{\partial g}$ 表示 $\left.\frac{\partial F_0^*}{\partial g'}\right|_{g'=g}$，$\frac{\partial F_0}{\partial L'}$ 表示 $\left.\frac{\partial F_0}{\partial L}\right|_{L=L'}$ 等等。

比较(8.84)式两边 J_2 的同次幂可得：

$$F_0^*=F_0(L') \qquad (8.85)$$

由(8.85)式知 $\frac{\partial F_0^*}{\partial g}=\frac{\partial^2 F_0^*}{\partial g^2}=0$，于是有：

$$F_1^*=F_1(L',G',H',l,g)+\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l} \qquad (8.86)$$

和

$$\begin{aligned}F_2^* &+\frac{\partial F_1^*}{\partial g}\frac{\partial S_1}{G'}=\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2\\ &+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}\end{aligned} \qquad (8.87)$$

将(8.69)式代入(8.85)式有

$$F_0^*=\frac{1}{2L'^2}. \qquad (8.88)$$

由于 F^* 不包含 l 即没有短周期项而$\frac{\partial S_1}{\partial l}$是纯短周期项，故可将(8.86)式右端的常数项和短周期项分离开来。将(8.72)—(8.77)式代入(8.86)式后可得：

$$F_1^* = F_{1c}(L', G', H') = \frac{J_2 A'}{2L'^3 G'^3}, \tag{8.89}$$

$$0 = F_{1s}(L', G', H', l, g) + \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l}. \tag{8.90}$$

由(8.90)式有

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} = -F_{1s} / \frac{\partial F_0}{\partial L} = \frac{J_2}{2L'^3}(A'\sigma_1' + B'\sigma_2'). \tag{8.91}$$

式中 A'、B' 和 σ_1'、σ_2' 是在(8.74)和(8.75)式中将旧变量 L、G、H 换为新变量 L'、G'、H'。A'、B' 与 l 无关而 σ_1'、σ_2' 与 l 有关。

利用 $dl = \frac{L}{G}\left(\frac{r}{a}\right)^2 df$，可得积分

$$\int \sigma_1 dl = \int \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - \left(\frac{L}{G}\right)^3\right] dl = \left(\frac{L}{G}\right)^3 (f - l + e\sin f) \tag{8.92}$$

$$\begin{aligned}\int \sigma_2 dl &= \int \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2(f+g) dl \\ &= \left(\frac{L}{G}\right)^3 \int (1 + e\cos f)\cos 2(f+g) df \\ &= \left(\frac{L}{G}\right)^3 \left[\frac{1}{2}\sin(2f + 2g) + \frac{e}{2}\sin(f + 2g) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{6}\sin(3f + 2g)\right].\end{aligned} \tag{8.93}$$

将(8.92)和(8.93)式代入(8.91)式后可得母函数的一阶部分。

$$\begin{aligned}S_1 = \frac{J_2}{2G'^3}\Big\{ &A'[(f' - l) + e'\sin f'] \\ &+ B'\Big[\frac{1}{2}\sin(2f' + 2g) + \frac{e'}{2}\sin(f' + 2g) \\ &+ \frac{e'}{6}\sin(3f' + 2g)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{8.94}$$

式中 e' 是 L' 和 G' 的函数，f' 是 e' 和 l 的函数.

由(8.89)式知 F_1^* 不含 g'，故 $\frac{\partial F_1^*}{\partial g}=\left.\frac{\partial F_1^*}{\partial g'}\right|_{g'=g}=0$。于是比较(8.87)式两边非短周期项和短周期项可得:

$$F_2^*=\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}\right\}_{n.s.}, \tag{8.95}$$

$$0=\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l}+\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}\right\}_s \tag{8.96}$$

式中 $\{\ \}_{n.s.}$ 和 $\{\ \}_s$ 分别表示取花括号内各项的非短周期项和短周期项．如果对花括号内三项求平均值后，分离开非短周期项和短周期项，则由(8.95)式可得新哈密顿函数的二阶部分 F_2^*．另外由(8.96)式还可得母函数的二阶部分 S_2，它是短周期项，可用来求二阶短周期振动和三阶长期振动.

将(8.94)式代入(8.82)式，忽略二阶短周期项等，可得新、旧变量之间关系为

$$\left.\begin{aligned}&L=L'+L_S,\ G=G'+G_S,\ H=H'\\&l=l'+l_S,\ g=g'+g_S,\ h=h'+h_S\end{aligned}\right\}. \tag{8.97}$$

由于 S_1 是一阶短周期项故这里 L_S、G_S、l_S、g_S 和 h_S 是变量的一阶短周期部分．利用

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial A}{\partial L}=\frac{\partial B}{\partial L}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial G}=-\frac{\partial B}{\partial G}=-\frac{3H^2}{G^3}\\&\frac{\partial A}{\partial H}=-\frac{\partial B}{\partial H}=\frac{3H}{G^2},\ \frac{\partial e}{\partial L}=\frac{G^2}{eL^3},\ \frac{\partial e}{\partial G}=-\frac{G}{eL^2}\\&\frac{\partial e}{\partial H}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial L}=\frac{1}{eL}(2+e\cos f)\sin f\\&\frac{\partial f}{\partial G}=-\frac{1}{eG}(2+e\cos f)\sin f,\quad \frac{\partial f}{\partial H}=0\end{aligned}\right\}. \tag{8.98}$$

由(8.94)式可得：

$$
\begin{aligned}
L_s &= \frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{J_2}{2L'^3}(A'\sigma_1' + B'\sigma_2') \\
G_s &= \frac{\partial S_1}{\partial g} = \frac{J_2 B'}{2G'^3}\Big[\cos(2f' + 2g') + e\cos(f' + 2g') \\
&\quad + \frac{e}{3}\cos(3f' + 2g')\Big] \\
l_s &= -\frac{\partial S_1}{\partial L'} = -\frac{J_2}{2e'L'G'^3}\Big\{A'\Big[\Big(3 - \frac{3}{4}e'\Big)\sin f' \\
&\quad + \frac{3}{2}e'\sin 2f' + \frac{1}{4}e'^2\sin 3f'\Big] \\
&\quad + B'\Big[-\frac{3}{4}e'\sin 2g' + \frac{1}{8}e'^2\sin(f' - 2g') \\
&\quad - \Big(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}e'^2\Big)\sin(f' + 2g') \\
&\quad + \Big(\frac{7}{6} - \frac{1}{24}e'^2\Big)\sin(3f' + 2g') \\
&\quad + \frac{3}{4}e'\sin(4f' + 2g') + \frac{1}{8}e'^2\sin(5f' + 2g')\Big]\Big\} \\
g_s &= -\frac{\partial S_1}{\partial G'} = -\frac{3J_2}{4G'^4}\Big\{(1 - 5\cos^2 i')[(f' - l') \\
&\quad + e'\sin f'] - (3 - 5\cos i')\Big[\frac{1}{2}\sin(2f' + 2g') \\
&\quad + \frac{e'}{2}\sin(f' + 2g') + \frac{e'}{6}\sin(3f' + 2g')\Big]\Big\} \\
&\quad + \frac{J_2}{2e'G'^4}\Big\{A'\Big[\Big(3 - \frac{3}{4}e'^2\Big)\sin f' + \frac{3}{2}e'\sin 2f' \\
&\quad + \frac{1}{4}e'^2\sin 3f'\Big] + B'\Big[-\frac{3}{4}e'\sin 2g' \\
&\quad + \frac{1}{8}e'^2\sin(f' - 2g') - \Big(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}e'^2\Big)\sin(f' + 2g') \\
&\quad + \Big(\frac{7}{6} - \frac{1}{24}e'^2\Big)\sin(3f' + 2g') + \frac{3}{4}e'\sin(4f' + 2g')
\end{aligned}
\tag{8.99}
$$

$$+\frac{1}{8}e'^2\sin(5f'+2g')\Big]\Big\}$$

$$h_s=-\frac{\partial S_1}{\partial H'}=-\frac{3J_2}{2G'^4}\cos i'\Big\{[(f'-l')+e'\sin f']$$

$$-\Big[\frac{1}{2}\sin(2f'+2g')+\frac{e'}{2}\sin(f'+2g')$$

$$+\frac{e'}{6}\sin(3f'+2g')\Big]\Big\}.$$

需要指出的是在(8.99)式右端中的 l'、g' 应为 l、g，但前面已有 J_2 因子故在准到一阶时，可用 l'、g' 代替．另外，在求 S_1 时作 $dl\to df$ 积分变量变换，因此积分结果 S_1 除短周期项外还有长周期项，这样得到的 L_s 等也不是纯短周期项，特别是 l_s 和 g_s 中 $\sin 2g'$ 项显然是长周期项，如对它们求平均值分离出其中的长周期项 $\bar{L}_s$ 等，则可得变量的一阶纯短周期部分为 $L_s-\bar{L}_s$ 等，而 $\bar{L}_s$ 等可并入后面所得到的变量的一阶长周期部分．

3. 第二次正则变换(消去 g')

与第一次正则变换相类似，首先要寻找一个不显含 t 的母函数 $S^*=S^*(L'',G'',H'',l',g',h')$，使得：

$$\left.\begin{aligned}L'=\frac{\partial S^*}{\partial l'},\quad G'=\frac{\partial S^*}{\partial g'},\quad H'=\frac{\partial S^*}{\partial h'}\\ l''=\frac{\partial S^*}{\partial L''},\quad g''=\frac{\partial S^*}{\partial G''},\quad h''=\frac{\partial S^*}{\partial H''}\end{aligned}\right\}.\tag{8.100}$$

所确定的正则变换所给出的新哈密顿函数不含 h''、l'' 和 g''，使 g'' 也成为循环坐标即 $F^{**}=F^{**}(L'',G'',H'')$．

同样将新的哈密顿函数和母函数按 J_2 的幂次展开：

$$F^{**}=F_0^{**}+F_1^{**}+F_2^{**}+O(J_2^3).\tag{8.101}$$

$$S^*=S_0^*+S_1^*+S_2^*+O(J_2^3).\tag{8.102}$$

其中 S_0^* 仍为无摄运动，对应的是恒等变换即有

$$S_0^*=L''l'+G''g'+H''h'\tag{8.103}$$

S_1^* 和 S_2^* 由 F^* 所引起，故也不含 h' 和 l'。将(8.102)和(8.103)式代入(8.100)式后，可得新、旧变量间关系是：

$$\left.\begin{aligned}
L' &= L'' \\
G' &= G'' + \frac{\partial S_1^*}{\partial g'} + \frac{\partial S_2^*}{\partial g'} + O(J_2^3) \\
H' &= H'' \\
l'' &= l' + \frac{\partial S_1^*}{\partial L''} + \frac{\partial S_2^*}{\partial L''} + O(J_2^3) \\
g'' &= g' + \frac{\partial S_1^*}{\partial G''} + \frac{\partial S_2^*}{\partial G''} + O(J_2^3) \\
h'' &= h' + \frac{\partial S_1^*}{\partial H''} + \frac{\partial S_2^*}{\partial H''} + O(J_2^3)
\end{aligned}\right\}。 \tag{8.104}$$

S^* 不显含 t 即 $\dfrac{\partial S^*}{\partial t} = 0$，故哈密顿函数仍不变，这时有

$$F^{**}(L'',G'',H'') = F^*(L',G',H',g')。 \tag{8.105}$$

同样利用(8.104)和(8.105)式逐步求出新的母函数 S^* 和哈密顿函数 F^{**} 以及新、旧变量之间关系。

同样将(8.105)式两边在变量L''、G''、H'' 和 g' 处展开并考虑到 F_0^* 只含 L' 和 $L' = L''$,$H = H''$，可得：

$$F_0^{**} + F_1^{**} + F_2^{**} = F_0^* + F_1^* + \frac{\partial F_1^*}{\partial G''} \frac{\partial S_1^*}{\partial g'} + F_2^* + O(J_2^3)。 \tag{8.106}$$

式中 $\dfrac{\partial F_1^*}{\partial G''} = \dfrac{\partial F_1^*}{\partial G'}\Big|_{G'=G''}$。

比较(8.106)式两边 J_2 的同次幂可得：

$$F_0^{**} = F_0^*(L'')。 \tag{8.107}$$

$$F_1^{**} = F_1^*(L'',G'',H'')。 \tag{8.108}$$

$$F_2^{**} = F_2^*(L'', G'', H'',g') + \frac{\partial F_1^*}{\partial G''} \frac{\partial S_1^*}{\partial g'}。 \tag{8.109}$$

将(8.88)和(8.89)式代入(8.107)和(8.108)式后，可得新哈密顿函数的零阶和一阶部分为

$$F_0^{**}=\frac{1}{2L''^2}, \tag{8.110}$$

$$F_1^{**}=\frac{J_2A''}{2L''^3G''^3}. \tag{8.111}$$

其中 A'' 是用新变量 G'' 和 H'' 来表示。

由于 F_2^{**} 不含 g' 是常数项而$\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}$是纯长周期项，故应当将 F_2^*的常数部分和长周期部分分离开．由(8.95)式，若令$\{\ \}_{s.s.}=\{\ \}_c+\{\ \}_l$ 分别表示其常数项和长周期项，则比较(8.109)式两边的常数部分和长周期部分可得：

$$F_2^{**}=F_{2c}^*(L'',G'',H'') \tag{8.112}$$

和

$$0=F_{2l}^*(L'',G'',H'',g')+\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\ \frac{\partial S_1^*}{\partial g'}. \tag{8.113}$$

由(8.95)式，我们有

$$F_{2c}^*=\left\{\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\ \frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\ \frac{\partial S_1}{\partial g}\right\}_c \tag{8.114}$$

和

$$F_{2l}^*=\left\{\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\ \frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\ \frac{\partial S_1}{\partial g}\right\}_l \tag{8.115}$$

由于 F_0 和 F_{1c} 是常数项，$\frac{\partial S_1}{\partial l}$和$\frac{\partial F_{1c}}{\partial L'}\ \frac{\partial S_1}{\partial l}$是纯短周期项，故要求出 F_2^{**} 和 S_1^* 必须首先计算$\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2$，$\frac{\partial F_{1c}}{\partial L'}\ \frac{\partial S_1}{\partial l}$和$\frac{\partial F_1}{\partial G'}\ \frac{\partial S_1}{\partial g}$的平均值。

利用表 7-1 和表 7-2 有

$$
\left.\begin{aligned}
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = \left(\frac{L}{G}\right)^3 \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4} = \left(1+\frac{e^2}{2}\right)\left(\frac{L}{G}\right)^5 \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6} = \left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right)\left(\frac{L}{G}\right)^9 \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos f} = \frac{1}{2}e\left(\frac{L}{G}\right)^3 \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f} = e\left(\frac{L}{G}\right)^5 \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos 2f} = \frac{1}{4}e^2\left(\frac{L}{G}\right)^5 \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6 \cos 2f} = \frac{3}{2}e^2\left(1+\frac{1}{6}e^2\right)\left(\frac{L}{G}\right)^9 \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6 \cos 4f} = \frac{1}{16}e^4\left(\frac{L}{G}\right)^9
\end{aligned}\right\}。 \tag{8.116}
$$

由(8.75)式有

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_1^2 = \left(\frac{a}{r}\right)^6 - 2\left(\frac{L}{G}\right)^3\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \left(\frac{L}{G}\right)^6 \\
&\sigma_1\sigma_2 = \left(\frac{a}{r}\right)^6 \cos 2(f+g) - \left(\frac{L}{G}\right)^3\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2(f+g) \\
&\sigma_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^6 [1+\cos 4(f+g)]
\end{aligned}\right\}。 \tag{8.117}
$$

利用(8.116) 和 (8.117)式可得:

$$
\left.\begin{aligned}
&\overline{\sigma_1^2} = \left(\frac{L}{G}\right)^9\left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right) - \left(\frac{L}{G}\right)^6 \\
&\overline{\sigma_1\sigma_2} = \frac{3}{2}\left(\frac{L}{G}\right)^9 e^2\left(1+\frac{1}{6}e^2\right)\cos 2g \\
&\overline{\sigma_2^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{G}\right)^9\left[\left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right)+\frac{e^4}{16}\cos 4g\right]
\end{aligned}\right\}。 \tag{8.118}
$$

将(8.118)式代入(8.91)式后可得:

$$\overline{\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2} = \frac{J_2^2}{4L'^6}\left(\frac{L'}{G'}\right)^9\left[\left(A'^2 + \frac{1}{2}B'^2\right)\right.$$

$$\left(1 + 3e'^2 + \frac{3}{8}e'^4\right) - A'^2\left(\frac{G'}{L'}\right)^3 + 3A'B'e'^2$$

$$\left.\times\left(1 + \frac{1}{6}e'^2\right)\cos 2g + \frac{1}{32}B'^2e'^4\cos 4g\right]. \tag{8.119}$$

由(8.91)式有 $F_{1S} = -\frac{\partial F_0}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{1}{L^3}\frac{\partial S_1}{\partial l}$(为方便起见推算中以 L 代替 L' 等,到最后再改为新变量), $\frac{\partial F_{1S}}{\partial L} = \frac{1}{L^3}\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right) - \frac{3}{L^4}\frac{\partial S_1}{\partial l}$, 故 $\frac{\partial F_{1S}}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{1}{2L^3}\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2 - \frac{3}{L^4}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2$. L 与 l 互为独立,它们的运算微积可以对易,于是有

$$\overline{\frac{\partial F_{1S}}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l}} = \frac{1}{2L^3}\frac{\partial}{\partial L}\overline{\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2} - \frac{3}{L^4}\overline{\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2}. \tag{8.120}$$

由(8.74)式可以看出 A 和 B 与 L 无关,故从(3.119)式有

$$\frac{\partial}{\partial L}\overline{\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2} = \frac{3}{L}\overline{\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2} + D, \tag{8.121}$$

其中

$$D = \frac{J_2^2}{4L^6}\left(\frac{L}{G}\right)^9\left[6\left(A^2 + \frac{1}{2}B^2\right)e\left(1 + \frac{1}{4}e^2\right)\frac{\partial e}{\partial L}\right.$$

$$+ 3A^2\left(\frac{G}{L}\right)^3\frac{1}{L} + 6ABe\left(1 + \frac{1}{3}e^2\right)\frac{\partial e}{\partial L}\cos 2g$$

$$\left.+ \frac{1}{8}B^2e^3\frac{\partial e}{\partial L}\cos 4g\right]. \tag{8.122}$$

将(8.121)式代入(8.120)式后,有

$$\overline{\frac{\partial F_{1S}}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l}} = \frac{D}{2L^3} - \frac{3}{2L^4}\overline{\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{L^4}\left[\frac{L}{2}D-\frac{3}{2}\overline{\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2}\right]. \tag{8.123}$$

将 $\dfrac{\partial e}{\partial L}=\dfrac{1-e^2}{eL}$ 代入(8.122)式并利用(8.119)式，则(8.123)式化为

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial L}\frac{\partial S_1}{\partial l}}=&\frac{J_2^2}{4L^{10}}\left(\frac{L}{G}\right)^9\left\{\left(A^2+\frac{1}{2}B^2\right)\left[3\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)\right.\right.\\&\left.\times(1-e^2)-\frac{3}{2}\left(1+3e^2+\frac{3}{8}e^4\right)\right]\\&+A^2\left(\frac{G}{L}\right)^3\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}AB\left[\left(2+\frac{2}{3}e^2\right)\right.\\&\left.\times(1-e^2)-3e^2\left(1+\frac{1}{6}e^2\right)\right]\cos 2g\\&\left.+\frac{1}{16}B^2e^2\left(1-e^2-\frac{3}{4}e^2\right)\cos 4g\right\}.\end{aligned}$$

或者是

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}}=&\frac{J_2^2}{4L'^{10}}\left(\frac{L'}{G'}\right)^9\left[\left(A'^2+\frac{1}{2}B'^2\right)\right.\\&\times\left(\frac{3}{2}-\frac{27}{4}e'^2-\frac{21}{16}e'^4\right)+3A'^2\left(\frac{G'}{L'}\right)^3\\&+A'B'\left(3-\frac{13}{2}e'^2-\frac{7}{4}e'^4\right)\cos 2g\\&\left.+B'^2e'^2\left(\frac{1}{16}-\frac{7}{64}e'^2\right)\cos 4g\right].\end{aligned} \tag{8.124}$$

利用(7.39)和(8.98)式有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{a}{r}\right)^3=-\frac{3G}{eL^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\\&\frac{\partial f}{\partial G}=-\frac{1}{eG}\left(1+\frac{G^2}{L^2}\frac{a}{r}\right)\sin f\end{aligned}\right\}. \tag{8.125}$$

将它们代入(8.75)和(8.76)式后有：

$$\frac{\partial\sigma_1^*}{\partial G}=-\frac{3G}{eL^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f$$

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial G}=-\frac{3G}{eL^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos 2\,(f+g)$$

$$+\frac{2}{eG}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1+\frac{G^2}{L^2}\ \frac{a}{r}\right)\sin f\sin 2(f+g)$$

$$=-\frac{G}{eL^2}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^4-\left(\frac{a}{r}\right)^3\frac{L^2}{G^2}\right]\cos(f+2g)\right.$$

$$\left.+\left[\frac{5}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^4+\left(\frac{a}{r}\right)^3\frac{L^2}{G^2}\right]\cos(3f+2g)\right\}.$$

利用它们，由(8.77)和(8.98)式可得：

$$\frac{\partial F_1}{\partial G}=\frac{J_2}{2L^6}\left[\frac{3H^2}{G^3}(\sigma_2-\sigma_1^*)+A\frac{\partial\sigma_1^*}{\partial G}+B\frac{\partial\sigma_2}{\partial G}\right].\quad(8.126)$$

另外，由(8.94)式有：

$$\frac{\partial S_1}{\partial g}=\frac{J_2B'}{2G'^3}\left[\cos(2f'+2g)+e'\cos(f'+2g)\right.$$

$$\left.+\frac{e'}{3}\cos(3f'+2g)\right].\quad(8.127)$$

利用上述诸式及(8.116)式可得：

$$\overline{\frac{\partial F_1}{\partial G'}\ \frac{\partial S_1}{\partial g}}=\frac{J_2^2}{4L'^{10}}\left(\frac{L'}{G'}\right)^7\left[B'\left(\frac{H'}{G'}\right)^2\left(\frac{3}{2}+e'^2-\frac{3}{2}e'^2\cos 2g\right)\right.$$

$$-B'^2\left(\frac{11}{6}+\frac{2}{3}e'^2+\frac{1}{16}e'^2\cos 4g\right)$$

$$\left.-A'B'\left(3+\frac{5}{4}e'^2\right)\cos 2g\right].\quad(8.128)$$

将(8.119)、(8.124)和(8.128)式代入(8.114)式并利用

$$A^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\left(\frac{H}{G}\right)^2+\frac{9}{4}\left(\frac{H}{G}\right)^4,$$

$$B^2=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\left(\frac{H}{G}\right)^2+\frac{9}{4}\left(\frac{H}{G}\right)^4.$$

$$AB = -\frac{3}{4} + 3\left(\frac{H}{G}\right)^2 - \frac{9}{4}\left(\frac{H}{G}\right)^4,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L^2} = \frac{3}{2L^4}.$$

经整理后可得常数项为

$$F_{2c}^* = \frac{3J_2^2}{128L'^{10}}\left(\frac{L'}{G'}\right)^5\left\{\left[5 - 18\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 5\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\right.$$
$$+ 4\left[1 - 6\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 9\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\left(\frac{L'}{G'}\right)$$
$$\left.- 5\left[1 - 2\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 - 7\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\left(\frac{L'}{G'}\right)^2\right\}. \qquad (8.129)$$

$\cos 2g$ 项的系数是$\frac{3J_2^2e^2}{64L^{10}}\left(\frac{L}{G}\right)^7\left[1 - 16\left(\frac{H}{G}\right)^2 + 15\left(\frac{H}{G}\right)^4\right]$，$\cos 4g$ 项的系数是零，故由(8.115)式可得：

$$F_{2l}^* = \frac{3J_2^2e'^2}{64L'^{10}}\left(\frac{L'}{G'}\right)^7\left[1 - 16\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 15\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\cos 2g. \quad (8.130)$$

将(8.129)式代入(8.112)式后可得经二次正则变换后的新的哈密顿函数：

$$F_2^{**} = \frac{3J_2^2}{128L''^{10}}\left(\frac{L''}{G''}\right)^5\left\{\left[5 - 18\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 + 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right]\right.$$
$$+ 4\left[1 - 6\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 + 9\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right]\left(\frac{L''}{G''}\right)$$
$$\left.- 5\left[1 - 2\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 - 7\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right]\left(\frac{L''}{G''}\right)^2\right\}. \qquad (8.131)$$

另外，由(8.89)式有：

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial G''} = \frac{J_2}{2L''^3G''^3}\left(\frac{\partial A''}{\partial G''} - \frac{3A''}{G''}\right)$$
$$= \frac{3J_2}{4L''^3G''^4}\left[1 - 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]. \qquad (8.132)$$

将(8.130)和(8.132)式代入(8.113)式并对g'积分可得新的母函数

是:

$$S_1^* = -\frac{J_2 e''^2}{32G''^3}\left[1 - 16\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 + 15\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right]$$
$$\times\left[1 - 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]^{-1}\sin 2g'. \qquad (8.133)$$

当 $i'' = 63°26'$ 时，$1-5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 = 0$。它称为临界角。

将(8.133)式代入(8.104)式后可得第二次正则变换的新、旧变量之间关系为

$$\left.\begin{array}{l} L' = L'',\ G' = G'' + G_l,\ H' = H'' \\ l' = l'' + l_l,\ g' = g'' + g_l,\ h' = h'' + h_l \end{array}\right\}. \qquad (8.134)$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} G_l = \frac{\partial S_1^*}{\partial g'} = -\frac{J_2 e''^2}{16''^3}\left[1 - 16\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 + 15\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right] \\ \qquad\times\left[1 - 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]^{-1}\cos 2g'' \\ l_l = -\frac{\partial S_1^*}{\partial L''} = \frac{J_2}{16L''^3 G''}\left[1 - 16\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right. \\ \qquad\left. + 15\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right]\left[1 - 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]^{-1}\sin 2g'' \\ g_l = -\frac{\partial S_1^*}{\partial G''} = -\frac{J_2}{16G''^4}\left\{\left[\left(1 + \frac{1}{2}e''^2\right)\right.\right. \\ \qquad - (16 + 19e''^2)\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 + 5\left(3 - \frac{7}{2}e''^2\right) \\ \qquad\left.\times\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right]\left[1 - 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]^{-1} - 200e''^2 \\ \qquad\left.\times\left(\frac{H''}{G''}\right)^6\left[1 - 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]^{-2}\right\}\sin 2g'' \\ h_l = -\frac{\partial S_1^*}{\partial H''} = -\frac{J_2 e''^2}{16G''^4}\left(\frac{H''}{G''}\right)\left\{\left[11 + 25\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]\right. \end{array}\right\} (8.135)$$

$$\times\left[1-5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]^{-1}+200\left(\frac{H''}{G''}\right)^4$$

$$\times\left[1-5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]^{-2}\Bigg\}\sin 2g''$$

由于 S_1^* 是一阶长周期项故它们是变量的一阶长周期部分.

4. J_2 的一阶解

经过二次正则变换后，所有广义坐标 l''、g''、h'' 都成为循环坐标了，运动方程可以完全积分。将(8.110)、(8.111) 和 (8.131) 式代入 (8.101) 式后得到二次正则变换后的哈密顿函数 $F^{**}=F^{**}(L'',G'',H'')$，这时正则方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL''}{dt}=\frac{dG''}{dt}=\frac{dH''}{dt}=0\\
&\frac{dl''}{dt}=-\frac{\partial F^{**}}{\partial L''}=n''\Bigg\{1-\frac{3J_2}{4L''G''^3}\left(1-3\frac{H''^2}{G''^2}\right)\\
&\qquad+\frac{3J_2^2}{128L''^3G''^7}\Bigg[5\left(5-18\frac{H''^2}{G''^2}+5\frac{H''^4}{G''^4}\right)\\
&\qquad+16\left(1-6\frac{H''^2}{G''^2}+9\frac{H''^4}{G''^4}\right)\left(\frac{L''}{G''}\right)\\
&\qquad-15\left(1-2\frac{H''^2}{G''^2}-7\frac{H''^4}{G''^4}\right)\left(\frac{L''}{G''}\right)^2\Bigg]\Bigg\}\\
&\frac{dg''}{dt}=-\frac{\partial F^{**}}{\partial G''}=n''\Bigg\{-\frac{3J_2}{4G''^4}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)\\
&\qquad+\frac{3J_2^2}{128L''^4G''^6}\Bigg[\left(25-126\frac{H''^2}{G''^2}+45\frac{H''^4}{G''^4}\right)\\
&\qquad+24\left(1-8\frac{H''^2}{G''^2}+15\frac{H''^4}{G''^4}\right)\left(\frac{L''}{G''}\right)\\
&\qquad+5\left(-7+18\frac{H''^2}{G''^2}+77\frac{H''^4}{G''^4}\right)\left(\frac{L''}{G''}\right)^2\Bigg]\Bigg\}\\
&\frac{dh''}{dt}=-\frac{\partial F^{**}}{\partial H''}=n''\Bigg\{-\frac{3J_2}{2G''^4}\frac{H''}{G''}+\frac{3J_2^2}{32L''^2G''^6}
\end{aligned}\right\}\quad(8.136)$$

$$
\times \frac{H''}{G''}\left[\left(9-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)+12\left(1-3\frac{H''^2}{G''^2}\right)\right.
$$

$$
\left.\times\left(\frac{L''}{G''}\right)-5\left(1+7\frac{H''^2}{G''^2}\right)\left(\frac{L''}{G''}\right)^2\right]\Bigg\}
$$

其中 $n''=\frac{1}{L''^3}$。

(8.136)式对时间 t 积分结果为

$$
\left.\begin{aligned}
&L''=L_0'',\ G''=G_0'',\ H''=H_0''\\
&l''=l_0''+\frac{dl''}{dt}(t-t_0)\\
&g''=g_0''+\frac{dg''}{dt}(t-t_0),\\
&h''=h_0''+\frac{dh''}{dt}(t-t_0)
\end{aligned}\right\}。\qquad(8.137)
$$

式中 L_0'' 等是初始时刻 t_0 时的值；$\frac{dl''}{dt}$ 等如(8.136)式所示，它们也是常数。

由(8.97)、(8.134)和(8.137)式可得：

$$
\left.\begin{aligned}
&L=L_0''+L_s,\quad l=l_0''+l_s+l_l+\frac{dl''}{dt}(t-t_0)\\
&G=G_0''+G_s+G_l\\
&\ g=g_0''+g_s+g_l+\frac{dg''}{dt}(t-t_0)\\
&H=H_0'',\quad h=h_0''+h_s+h_l+\frac{dh''}{dt}(t-t_0)
\end{aligned}\right\}。\qquad(8.138)
$$

其中 $L_0'',\cdots,h_0''$ 是初始值；$L_s,\cdots,h_s$ 是一阶短周期项和部分长周期项；$G_l,\cdots,h_l$ 是其余的一阶长周期项；$\frac{dl''}{dt}$、$\frac{dg''}{dt}$ 和 $\frac{dh''}{dt}$ 是准到二阶的长期项系数。它们的表示式分别为(8.99)、(8.135)和(8.136)式。

5. 用轨道根数来表示的一阶解

由 (8.67) 式有

$$\left.\begin{array}{lll} a=L^2, & e^2=1-\dfrac{G^2}{L^2}, & \cos i=\dfrac{H}{G} \\ M=l, & \omega=g, & \Omega=h \end{array}\right\}. \quad (8.139)$$

利用(8.139)式可将(8.138)式转换为习惯用的轨道根数形式。

若 σ 表示 a、e 和 i，则有 $\sigma=\sigma(L,G,H)$。利用(8.138)式有 $\sigma=\sigma_0+\dfrac{\partial\sigma}{\partial L}L_s+\dfrac{\partial\sigma}{\partial G}(G_s+G_l)=\sigma_0+\sigma_s+\sigma_l$。这里 σ_0、σ_s 和 σ_l 分别表示 a、e 和 i 的初始值、一阶短周期项和一阶长周期项，于是有

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_s=\dfrac{\partial\sigma}{\partial L}L_s+\dfrac{\partial\sigma}{\partial G}G_s \\ \sigma_l=\dfrac{\partial\sigma}{\partial G}G_l \end{array}\right\}. \quad (8.140)$$

另外，由(8.139)式有

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial a}{\partial L}=2L, & \dfrac{\partial e}{\partial L}=\dfrac{G^2}{eL^3}, & \dfrac{\partial i}{\partial L}=0 \\ \dfrac{\partial a}{\partial G}=0, & \dfrac{\partial e}{\partial G}=-\dfrac{G}{eL^2}, & \dfrac{\partial i}{\partial G}=\dfrac{H}{G^2\sin i} \end{array}\right\}. \quad (8.141)$$

将(8.73)、(8.99)、(8.135) 和 (8.141) 式一起代入(8.140)式并利用 $1-16\left(\dfrac{H}{G}\right)^2+15\left(\dfrac{H}{G}\right)^4=-\sin^2 i(14-15\sin^2 i)$ 可得：

$$\begin{aligned} a_s=&\frac{J_2}{a}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]\right. \\ &\left.+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right\} \\ a_l=&0 \\ e_s=&\frac{J_2(1-e^2)}{2a^2e}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]\right. \end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 i \cos 2(f-\omega) \\
& - \frac{3}{2(1-e^2)^2}\sin^2 i \Big[\cos 2(f+\omega) \\
& + e\cos(f+2\omega) + \frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\Big]\Big\} \\
e_l &= \frac{J_2 e}{16 p a}\sin^2 i(14-15\sin^2 i)(4-5\sin^2 i)^{-1}\cos 2\omega \\
i_s &= \frac{3J_2}{8p^2}\sin 2i\Big[\cos 2(f+\omega) + e\cos(f+2\omega) \\
& + \frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)\Big] \\
i_l &= -\frac{J_2 e^2}{32 p^2}\sin 2i\Big[(14-15\sin^2 i) \\
& \times (4-5\sin^2 i)^{-1}\cos 2\omega
\end{aligned}
\right\} \quad (8.142)
$$

式中 $p = a(1-e^2)$。

由(8.99)和(8.135)式可得根数 Ω、ω 和M的一阶短周期项和一阶长周期项是：

$$
\left.
\begin{aligned}
\Omega_s &= -\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\Big[(f-M+e\sin f) - \frac{1}{2}\sin 2 \\
& \times (f+\omega) - \frac{e}{2}\sin(f+2\omega) \\
& - \frac{e}{6}\sin(3f+2\omega)\Big] \\
\Omega_l &= -\frac{J_2 e^2}{2p^2}\cos i\left(7-15\sin^2 i + \frac{75}{8}\sin^4 i\right) \\
& \times (4-5\sin^2 i)^{-2}\sin 2\omega \\
\omega_s &= \frac{3J_2}{4p^2}\Big\{(4-5\sin^2 i)(f-M+e\sin f) \\
& + \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Big[\left(\frac{2}{e} - \frac{e}{2}\right)\sin f
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\sin 2f+\frac{e}{6}\sin 3f\Big]-\Big[\frac{1}{2e}\sin^2 i \\
&+\left(1-\frac{15}{8}\sin^2 i\right)e\Big]\sin(f+2\omega) \\
&-\left(1-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\sin 2(f+\omega) \\
&+\Big[\frac{7}{6e}\sin^2 i-\frac{1}{3}\left(1-\frac{19}{8}\sin^2 i\right)e\Big] \\
&\times\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{4}\sin^2 i\sin(4f+2\omega) \\
&+\frac{e}{8}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\Big\} \\
&-\frac{9J_2}{16p^2}\sin^2 i\sin 2\omega \\
\omega_s=&-\frac{J_2}{2p^2}\Big[\sin^2 i\left(7-\frac{65}{4}\sin^2 i+\frac{75}{8}\sin^4 i\right) \\
&-e^2\left(7-\frac{51}{2}\sin^2 i+\frac{65}{2}\sin^4 i-\frac{225}{16}\sin^6 i\right)\Big] \\
&\times(4-5\sin^2 i)^{-2}\sin 2\omega \\
=&-\frac{J_2}{2p^2}\Big[\sin^2 i\left(25-\frac{245}{4}\sin^2 i+\frac{75}{2}\sin^4 i\right) \\
&-e^2\left(7-\frac{51}{2}\sin^2 i+\frac{65}{2}\sin^4 i-\frac{225}{16}\sin^6 i\right)\Big] \\
&\times(4-5\sin^2 i)^{-2}\sin 2\omega+\frac{9J_2}{16p^2}\sin^2 i\sin 2\omega \\
M_s=&-\frac{3J_2(1-e^2)^{1/2}}{2p^2e}\Big\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right) \\
&\times\Big[\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\sin f+\frac{e}{2}\sin 2f+\frac{e^2}{12}\sin 3f\Big] \\
&-\frac{1}{4}\sin^2 i\Big[\left(1+\frac{5}{4}e^2\right)\sin(f+2\omega)
\end{aligned}\right\} \quad (8.143)
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{12}e^2\right)\sin(3f+2\omega)\\
&-\frac{3}{2}e\sin(4f+2\omega)-\frac{e^2}{4}\sin(5f+2\omega)\\
&-\frac{e^2}{4}\sin(f-2\omega)\Big]\Big\}\\
&+\frac{9J_2}{16p^2}(1-e^2)^{1/2}\sin^2 i\sin 2\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_l=&\frac{J_2(1-e^2)^{1/2}}{16pa}\sin^2 i(14-15\sin^2 i)\\
&\times(4-5\sin^2 i)^{-1}\sin 2\omega\\
=&\frac{J_2(1-e^2)^{1/2}}{16p^2}\sin^2 i[10(5-6\sin^2 i)\\
&-e^2(14-15\sin^2 i)](4-5\sin^2 i)^{-1}\\
&\times\sin 2\omega-\frac{9J_2}{16p^2}(1-e^2)^{1/2}\sin^2 i\sin 2\omega
\end{aligned}
$$

这里所得到的结果与用平均根数法所得到的结果基本一样，只是在ω_l中$\frac{9J_2}{16p^2}\sin^2 i\sin 2\omega$这项移到了$\omega_s$中，$M_l$中$\frac{9J_2}{16p^2}(1-e^2)^{1/2}\sin^2 i\sin 2\omega$这项移到了$M_s$中，互相调换了位置。

由(8.136)式立即可得根数a、e和i没有长期项。根数Ω、ω和M的一阶长期项(M中包含零阶)和二阶长期项的系数是：

$$
\begin{aligned}
\Omega_1=&-\frac{3J_2}{2p^2}n\cos i\\
\Omega_2=&-\frac{9J_2^2}{4p^4}n\cos i\left[\left(\frac{3}{2}+\sqrt{1-e^2}+\frac{e^2}{6}\right)\right.\\
&\left.-\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}-\frac{5}{24}e^2\right)\sin^2 i\right]\\
\omega_1=&\frac{3J_2}{4p^2}n(4-5\sin^2 i)
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{9J_2^2}{4p^4}n\left[\left(4+2\sqrt{1-e^2}+\frac{7}{12}e^2\right)\right.\\
&\quad -\left(\frac{103}{12}+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}+\frac{3}{8}e^2\right)\sin^2 i\\
&\quad \left.+\left(\frac{215}{48}+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}-\frac{15}{32}e^2\right)\sin^4 i\right]\\
M_1 &= n\left[1+\frac{3J_2}{2p^2}(1-e^2)^{1/2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right]\\
M_2 &= \frac{9J_2^2}{4p^4}(1-e^2)^{1/2}n\left[\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\sqrt{1-e^2}+\frac{5}{12}e^2\right)\right.\\
&\quad -\left(\frac{25}{12}+2\sqrt{1-e^2}+\frac{5}{12}e^2\right)\sin^2 i\\
&\quad \left.+\left(\frac{65}{48}+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}-\frac{25}{96}e^2\right)\sin^4 i\right]
\end{aligned}\right\}. \quad (8.144)$$

到此为止我们利用德洛勒－柴倍耳方法得到了地球引力场位函数中 J_2 所引起的全部一阶解：一阶（短和长）周期项和一、二阶长期项，结果是：

$$\left.\begin{aligned}
&a = a_0 + a_s,\ e = e_0 + e_s + e_l,\ i = i_0 + i_s + i_l\\
&\Omega = \Omega_0 + \Omega_s + \Omega_l + (\Omega_1 + \Omega_2)(t - t_0)\\
&\omega = \omega_0 + \omega_s + \omega_l + (\omega_1 + \omega_2)(t - t_0)\\
&M = M_0 + M_s + M_l + (M_1 + M_2)(t - t_0)
\end{aligned}\right\}. \quad (8.145)$$

式中 a_0、$\cdots$、M_0 为初始值；a_s、$\cdots$、M_s，e_l、$\cdots$、M_l、Ω_1、$\cdots$、M_2 等为(8.142)、(8.143)和(8.144)式所示。

§4 用柴倍耳变换求高阶带谐项的摄动

1. J_3 和 J_4 项对哈密顿函数 F 的影响

在地球引力场位函数展式中除 J_2 外，带谐系数 J_3 和 J_4 的数值最大，它们相当于 J_2^2 量级，因此在完整的一阶理论中还需考虑 J_3 和 J_4 项的影响。

当考虑 J_3 和 J_4 项时，由(8.68)和(8.71)式可得这时对哈密顿函数贡献为

$$\Delta F = -\frac{1}{r^4} J_3P_3(\sin\varphi) - \frac{1}{r^5} J_4P_4(\sin\varphi). \tag{8.146}$$

其中 $P_3(\sin\varphi) = \frac{1}{2}(5\sin^2\varphi - 3)\sin\varphi$，$P_4(\sin\varphi) = \frac{1}{8}(35\sin^4\varphi - 30\sin^2\varphi + 3)$。

利用 $\sin\varphi = \sin i\sin(f+g)$，$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\sin^2 i[1-\cos 2(f+g)]$，$\sin^3\varphi = \frac{1}{4}\sin^3 i[3\sin(f+g) - \sin 3(f+g)]$，$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}\sin^4 i[3 - 4\cos 2(f+g) + \cos 4(f+g)]$，(8.146) 式化为

$$\begin{aligned}\Delta F = &-\frac{1}{a^4}J_3\left(\frac{a}{r}\right)^4\left[\left(\frac{15}{8}\sin^2 i - \frac{3}{2}\right)\sin(f+g)\right.\\&\left.-\frac{5}{8}\sin^2 i\sin 3(f+g)\right]\sin i\\&-\frac{1}{a^5}J_4\left(\frac{a}{r}\right)^5\left[\left(\frac{3}{8} - \frac{15}{8}\sin^2 i + \frac{105}{64}\sin^4 i\right)\right.\\&+\left(\frac{15}{8} - \frac{35}{16}\sin^2 i\right)\sin^2 i\cos 2(f+g)\\&\left.+\frac{35}{64}\sin^4 i\cos 4(f+g)\right].\end{aligned} \tag{8.147}$$

利用(7.68)、(7.69)、表 2-1 和 2-2 得：

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin(f+g)} = \left(\frac{L}{G}\right)^5 e\sin g\\&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin 3(f+g)} = 0\\&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5} = \left(\frac{L}{G}\right)^7\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\\&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5\cos 2(f+g)} = \frac{3}{4}\left(\frac{L}{G}\right)^7 e^2\cos 2g\end{aligned}\right\}. \tag{8.148}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^5 \cos 4(f+g)} = 0$$

我们将(8.147)式对M求平均值分离出其中非短周期部分. 利用(8.148)式可得:

$$\overline{\Delta F} = -\frac{3J_3}{8L^3G^5}e\sin i(1-5\cos^2 i)\sin g$$
$$-\frac{3J_4}{8L^3G^7}\left[\left(\frac{3}{8}-\frac{15}{4}\cos^2 i+\frac{35}{8}\cos^4 i\right)\right.$$
$$\times\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+\left(-\frac{5}{8}+5\cos^2 i\right.$$
$$\left.\left.-\frac{35}{8}\cos^4 i\right)e^2\cos 2g\right]. \tag{8.149}$$

2. J_3 和 J_4 项对新哈密顿函数 F^* 和母函数 S_1 的影响

第一次正则变换后的哈密顿函数保持不变，仍有(8.83)式.在变量 L'、G'、H' 和 l、g 处展开时，(8.84)式右端增加一项 J_2^2 量级的 ΔF. 比较 J_2 的同次幂，由(8.86)式知对 S_1 无贡献，即 J_3和 J_4 项不产生一阶短周期项. 由(8.95)式知对新哈密顿函数 F^* 的贡献是:

$$F_2^* = \overline{\Delta F}. \tag{8.150}$$

其中$\overline{\Delta F}$如(8.149)式所示.

3. J_3 和 J_4 项对第二次正则变换后的新哈密顿函数 F^{**} 和新的母函数 S_1^* 的影响

第二次正则变换后的哈密顿函数也保持不变即有(8.105)式.

我们令 $\Delta_c F$ 和 $\Delta_l F$ 分别表示 $\overline{\Delta F}$ 中的常数项和长周期项，则由(8.149)式有

$$\Delta_c F = -\frac{3J_4}{8L^3G^7}\left(\frac{3}{8}-\frac{15}{4}\cos^2 i\right.$$
$$\left.+\frac{35}{8}\cos^4 i\right)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right). \tag{8.151}$$

和

$$\Delta_l F = -\frac{3J_3}{8L^3G^5}e\sin i(1-5\cos^2 i)\sin g$$

$$-\frac{3J_4}{8L^3G^7}\left(-\frac{5}{8}+5\cos^2 i-\frac{35}{8}\cos^4 i\right)e^2\cos 2g. \quad (8.152)$$

由(3.112)和(2.151)式知 J_3 对新哈密顿函数 F^{**} 无贡献，因此不产生二阶长期项，J_4 对 F^{**} 的贡献是：

$$F_2^{**} = \Delta_c F. \quad (8.153)$$

其中 $\Delta_c F$ 如(3.151)式所示。

由(8.113)式有

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial g} = -\Delta_l F \Big/ \frac{\partial F_1^*}{\partial G}. \quad (8.154)$$

这里$\frac{\partial F_1^*}{\partial G}$是由于 J_2 项所引起的形式如(8.132)式所示．为了方便起见，我们略去"′"，"″"，"‴"等，它并不影响结果的精度(一阶解)．将(8.132)和(8.152)式一起代入(8.154)式并对 g 积分可得 J_3 和 J_4 项对新母函数 S_1^* 的贡献是：

$$S_1^* = -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{e\sin i}{G}\cos g - \frac{5}{32}\frac{J_4}{J_2}\frac{e^2}{G^3}$$

$$\times[1-3\cos^2 i-8\cos^4 i(1-5\cos^2 i)^{-1}]\sin 2g.$$

$$(8.155)$$

4. J_3 和 J_4 项对一阶长周期项和二阶长期项的影响

将(8.155)式代入(8.104)式后可得 J_3 和 J_4 项所产生的一阶长周期项为

$$G_l = \frac{1}{2p^{1/2}}\frac{J_3}{J_2}e\sin i\sin g - \frac{5}{16p^{3/2}}\frac{J_4}{J_2}e^2[1-$$

$$3\cos^2 i-8\cos^4 i(1-5\cos^2 i)^{-1}]\cos 2g$$

$$l_l = \frac{1}{2a}\frac{J_3}{J_2}\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e}\sin i\cos g$$

$$+\frac{5}{16pe}\frac{J_4}{J_2}(1-e^2)^{1/2}[1-3\cos^2 i$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad -8\cos^4 i(1-5\cos^2 i)^{-1}]\sin 2g \\
g_l &= -\frac{1}{2p}\frac{J_3}{J_2}\left(\frac{\sin i}{e}-\frac{e}{\sin i}\cos^2 i\right)\cos g \\
&\quad -\frac{5}{16p^2}\frac{J_4}{J_2}\left[\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)\right. \\
&\quad -3\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\cos^2 i-8\left(1+\frac{5}{2}e^2\right) \\
&\quad \times\cos^4 i(1-5\cos^2 i)^{-1} \\
&\quad \left.-40e^2\cos^6 i(1-5\cos^2 i)^{-2}\right]\sin 2g \\
h_l &= -\frac{1}{2p}\frac{J_3}{J_2}\frac{e\cos i}{\sin i}\cos g-\frac{5}{16p^2}\frac{J_4}{J_2}e^2\cos i \\
&\quad \times[3+16\cos^2 i(1-5\cos^2 i)^{-1}+40\cos^4 i \\
&\quad \times(1-5\cos^2 i)^{-2}]\sin 2g
\end{aligned}\right\}. \tag{8.156}
$$

将(8.151)和(8.153)式代入正则方程后可得 J_3 项不产生二阶长期项，J_4 项所产生二阶长期项系数为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dt}=\frac{dG}{dt}=\frac{dH}{dt}=0 \\
&\frac{dl}{dt}=-\frac{45(1-e^2)^{1/2}e^2}{128p^4}J_4n(3-30\cos^2 i+35\cos^4 i) \\
&\frac{dg}{dt}=-\frac{15}{128p^4}J_4n[12+9e^2-(144+126e^2)\cos^2 i \\
&\qquad +(196+189e^2)\cos^4 i] \\
&\frac{dh}{dt}=-\frac{15}{32p^4}J_4n(2+3e^2)\cos i(3-7\cos^2 i)
\end{aligned}\right\}. \tag{8.157}
$$

5. 用轨道根数来表示的一阶解

利用(8.140)和(8.156)式知 J_3 和 J_4 项同样对轨道根数不会产生一阶短周期项，它们所产生的一阶长周期项为

$$
\begin{aligned}
a_l &= 0 \\
e_l &= -\frac{1}{2a}\frac{J_3}{J_2}\sin i\sin\omega+\frac{5}{16pa}\frac{J_4}{J_2}e\sin^2 i
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\times(6-7\sin^2 i)(4-5\sin^2 i)^{-1}\cos 2\omega\\
i_l &= \frac{1}{2p}\frac{J_3}{J_2}e\cos i\sin\omega-\frac{5}{32p^2}\frac{J_4}{J_2}e^2\sin 2i\\
&\times(6-7\sin^2 i)(4-5\sin^2 i)^{-1}\cos\omega\\
\Omega_l &= -\frac{1}{2p}\frac{J_3}{J_2}e\frac{\cos i}{\sin i}\cos\omega-\frac{5}{16p^2}\frac{J_4}{J_2}e^2\cos i\\
&\times(24-56\sin^2 i+35\sin^4 i)(4-5\sin^2 i)^{-2}\sin 2\omega\\
\omega_l &= -\frac{1}{2p}\frac{J_3}{J_2}\left[\frac{(1+e^2)\sin^2 i-e^2}{e\sin i}\right]\cos\omega\\
&-\frac{5}{32p^2}\frac{J_4}{J_2}[2\sin^2 i(24-58\sin^2 i+35\sin^4 i)\\
&-e^2(48-184\sin^2 i+240\sin^4 i\\
&-105\sin^6 i)]\sin 2\omega\\
M_l &= \frac{1}{2a}\frac{J_3}{J_2}\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e}\sin i\cos\omega+\frac{5}{16pa}\frac{J_4}{J_2}\\
&\times(1-e^2)^{1/2}\sin^2 i(6-7\sin^2 i)(4\\
&-5\sin^2 i)^{-1}\sin 2\omega
\end{aligned}\right\}\quad(8.158)
$$

由 (8.157) 式可得 J_3 项同样对轨道根数不会产生二阶长期项，J_4 项对轨道根数所产生的二阶长期项系数为

$$
\left.\begin{aligned}
&a_2=e_2=i_2=0\\
&\Omega_2=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},\quad \omega_2=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t},\quad M_2=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\}.\quad(8.159)
$$

式中$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$就是(3.157)式。

到此为止我们用德洛勒-柴倍耳方法求出了人造卫星在地球引力场中运动的完整一阶解即 J_2、J_3 和 J_4 项所产生的一阶短周期项、长周期项和二阶长期项.

如果在(8.68)式中再加人 $J_n(n\geqslant 5)$项，同样可以得到其它高阶带谐项对轨道根数产生的一阶长周期项和二阶长期项. 显然它们不会产生一阶短周期项. 另外，当 n 为奇数时，由于 $P_n(\sin\varphi)$

仅出现 $\sin k(f+g)$ 项，它与$\left(\frac{a}{r}\right)^p$ $(p\geqslant 4)$ 项相乘后对M求平均值结果所分离出的非短周期部分只包含 $\sin kg$ 项即其常数部分为零. 由 (8.112) 式知它们对二次正则变换后的新哈密顿函数 F^{**} 无贡献，因此同样可以得到这样结论：在地球引力场位函数展式中，仅偶阶带谐项会产生二阶长期项，而奇阶带谐项不会产生二阶长期项. 如果在(8.68)式中再加入田谐项的话，类似可以求出田谐项对轨道根数的影响. 利用这个方法在原则上毫无困难地也可以进一步求二阶或更高阶的解，只是更加繁复而已.

1962 年古在由秀以 J_2 为一阶小量，J_3 和 J_4 为二阶小量，J_5 到 J_8 为三阶小量，$J_n(n\geqslant 9)$ 为四阶小量，利用这种变换得到了卫星在地球引力场中运动的二阶解（二阶周期项和三阶长期项）.

§5 李级数和李变换

由前节可以看出在德洛勒——柴倍耳变换中新旧变量之间关系采用隐函数形式，在计算时会引起较大麻烦. 堀源一郎 (Hori) 和德普里(Deprit) 分别在 1966 年和 1969 年把李级数应用到正则变换理论，采用李变换使新旧变量之间关系呈显函数形式，并给出了递推公式大大地简化了计算.

1. 李导数和李级数

由天体力学知道：若 f、g 和W是 $2m$ 个变量 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$和小参数 ε 的可微函数，则定义

$$
\begin{aligned}
\{f,W\} &= \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial W}{\partial Y_j}-\frac{\partial f}{\partial Y_j}\frac{\partial W}{\partial y_j}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial(f,W)}{\partial(y_j,Y_j)}
\end{aligned}
\tag{8.160}
$$

为函数 f、W 的泊松括号. 泊松括号是一种微分算子，由于它满足可加性 $\{f+g,W\}=\{f,W\}+\{g,W\}$ 和齐次性 $\{\alpha f,W\}=$

$\alpha\{f, W\}$，(其中α为任意实数)，因此它是属于线性算子．由(8.160)式不难得出：

$$\left.\begin{aligned}&\{f,W\}=-\{W,f\},\ \{f,-W\}=-\{f,W\}\\&\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial\varepsilon},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right\}\\&\{\{f,g\},W\}+\{\{g,W\},f\}+\{\{W,f\},g\}=0\end{aligned}\right\}. \quad (8.161)$$

(8.160)式也可以表示成微分算子 $L_W f$，它称为函数 f 以W为母函数的李导数，因此李导数实质就是泊松括号．

利用李导数可以定义另外二个微分算子

$$\Delta_W f=\left(L_W+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)f \quad (8.162)$$

和

$$E_W f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\Delta_W^n f)_{\varepsilon=\varepsilon_0} \quad (8.163)$$

式中 $\Delta_W^0 f=f$，$\Delta_W^1 f=\Delta_W f$，$\Delta_W^2 f=\Delta_W(\Delta_W f)$，$\cdots$，$\Delta_W^n f=\Delta_W^{n-1}(\Delta_W f)$，$L_W^0 f=f$，$L_W^1 f=L_W f$，$L_W^2 f=L_W(L_W f)$，$\cdots$，$L_W^n f=L_W^{n-1}(L_W f)$．

由(8.163)式所定义的级数称为函数 f 的李级数．由于泊松括号是线性算子，故 L_W、Δ_W 和 E_W 也是线性算子．

对于任意二个实数α、β和函数 $f(y,Y,\varepsilon)$、$g(y,Y,\varepsilon)$，利用(8.160)—(8.163)式，不难推出它们具有下列性质：

$$\left.\begin{aligned}&L_W(\alpha f+\beta g)=\alpha L_W f+\beta L_W g\\&L_W(fg)=fL_W g+gL_W f\\&L_W\{f,g\}=\{f,L_W g\}+\{L_W f,g\}\\&L_W^n(\alpha f+\beta g)=\alpha L_W^n f+\beta L_W^n g\\&L_W^n(fg)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k L_W^k f L_W^{n-k}g\\&L_W^n\{f,g\}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\{L_W^k f,L_W^{n-k}g\}\end{aligned}\right\}. \quad (8.164)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_W(\alpha f+\beta g)=\alpha\Delta_W f+\beta\Delta_W g\\
&\Delta_W(fg)=f\Delta_W g+g\Delta_W f\\
&\Delta_W\{f,g\}=\{f,\Delta_W g\}+\{\Delta_W f,g\}\\
&\Delta_W^n(\alpha f+\beta g)=\alpha\Delta_W^n f+\beta\Delta_W^n g\\
&\Delta_W^n(fg)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta_W^k f\Delta_W^{n-k}g\\
&\Delta_W^n\{f,g\}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\{\Delta_W^k f,\Delta_W^{n-k}g\}
\end{aligned}\right\}. \quad (8.165)$$

和

$$\left.\begin{aligned}
&E_W(\alpha f+\beta g)=\alpha E_W f+\beta E_W g\\
&E_W(fg)=E_W f\times E_W g\\
&E_W\{f,g\}=\{E_W f,E_W g\}
\end{aligned}\right\}. \quad (8.166)$$

(8.164) 和 (8.165) 式中前二式是显然成立的。由 (8.160) 和 (8.161) 式有 $L_W\{f,g\}=\{\{f,g\},W\}=\{f,\{g,W\}\}+\{\{f,W\},g\}=\{f,L_W g\}+\{L_W f,g\}$，故 (8.164) 式中的第三式成立。而 $\Delta_W\{f,g\}=\left(L_W+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\{f,g\}=\left\{f,\left(L_W+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)g\right\}+\left\{\left(L_W+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)f,g\right\}=\{f,\Delta_W g\}+\{\Delta_W f,g\}$，即 (8.165) 式中的第三式也成立。对 (8.164) 和 (8.165) 式中前三式连续运算 n 次我们就得到其后三式。

(8.166) 式中第一式显然成立。利用级数乘法法则我们有

$$\begin{aligned}
E_W f\times E_W g&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\Delta_W^n f)_{\varepsilon=0}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\Delta_W^n g)_{\varepsilon=0}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon^k}{k!}(\Delta_W^k f)_{\varepsilon=0}\frac{\varepsilon^{n-k}}{(n-k)!}(\Delta_W^{n-k}g)_{\varepsilon=0}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\Delta_W^k f)_{\varepsilon=0}(\Delta_W^{n-k}g)_{\varepsilon=0}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\Delta_W^n(f,g))_{\varepsilon=0}=E_W(fg).
\end{aligned}$$

故(8.166)式中第二式成立。

而 $\{E_W f, E_W g\} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\Delta_W^n f, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\Delta_W^n g\right\} = \{f, g\} + \{\varepsilon\Delta_W f, g\}$

$$+ \{f, \varepsilon\Delta_W g\} + \cdots\cdots + \sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{\varepsilon^k}{k!}\Delta_W^k f,\right.$$

$$\left.\frac{\varepsilon^{n-k}}{(n-k)!}\Delta_W^{n-k} g\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\{\Delta_W^k f, \Delta_W^{n-k} g\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\Delta_W^n\{f, g\} = E_W\{f, g\},$$

即(8.166)式中第三式也成立。

2. 李变换是一种正则变换

我们利用(8.163)式所定义的李级数作变量变换:

$$x = E_W y, \quad X = E_W Y. \tag{8.167}$$

由(8.167)式所定义的变换称为李变换，其中 $W(y, Y, \varepsilon)$ 是变换的母函数。

不难证明李变换是一种正则变换。事实上根据泊松括号定义(8.160)式有 $\{y_i, y_k\} = \{Y_i, Y_k\} = 0$，$\{y_i, Y_k\} = \delta_{ik}$，于是由(8.163)、(8.166)和(8.167)式可得:

$$\left.\begin{aligned}
\{x_i, x_k\} &= \{E_W y_i, E_W y_k\} = E_W\{y_i, y_k\} = E_W(0) = 0 \\
\{X_i, X_k\} &= \{E_W Y_i, E_W Y_k\} = E_W\{Y_i, Y_k\} \\
&= E_W(0) = 0 \\
\{x_i, X_k\} &= \{E_W y_i, E_W Y_k\} = E_W\{y_i, Y_k\} \\
&= E_W(\delta_{ik}) = \delta_{ik}
\end{aligned}\right\}. \tag{8.168}$$

比较(8.39)和(8.168)式可以看出李变换是一种 $\mu = 1$ 的正则变换即接触变换。

3. 李变换中新哈密顿函数的计算和新旧变量之间关系

1969年德普里曾经证明了在形式为(8.167)的李变换下，对于 $2m$ 个变量 x、X 和小参数 ε 的任一函数 $F(x, X, \varepsilon)$ 可用 $2m$ 个新变量 y、Y 来表示，其形式是:

$$F(x, X, \varepsilon) = F(E_W y, E_W Y, \varepsilon) = E_W F(y, Y, \varepsilon)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\Delta_W^n F)_{\varepsilon=0} \tag{8.169}$$

由(8.163)和(8.167)式知，当 $\varepsilon=0$ 时 $E_W f=\Delta_W^0 f=f$，$x=y$，$X=Y$。故(8.169)式相当于$F(x,X,\varepsilon)$在 $\varepsilon=0$ 即 $x=y, X=Y$ 处展开成类似马克劳林级数一样，只是级数中的系数不是普通导数而包含着李导数。

在天体力学中，常常能将哈密顿函数 $F(x,X,\varepsilon)$ 和变换母函数 $W(y,Y,\varepsilon)$ 展开为小参数 ε 的幂级数，即有

$$F(x,X,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}F_n(x,X)=F_0+\varepsilon F_1+\frac{\varepsilon^2}{2!}F_2+\cdots\cdots \tag{8.170}$$

和

$$W(y,Y,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}W_{n+1}(y,Y)=W_1+\varepsilon W_2+\frac{\varepsilon^2}{2!}W_3+\cdots. \tag{8.171}$$

为了方便起见，将 $L_{W_{n+1}}$ 用 L_{n+1} 来表示。则由(8.160)和(8.171)式有

$$\begin{aligned}L_W&=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial W}{\partial Y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{\partial W}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial Y_j}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial Y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{\partial W_{n+1}}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial Y_j}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L_{n+1}\end{aligned} \tag{8.172}$$

如果变量变换是完全正则的，那么哈密顿函数形式不变。设 F^* 和 F 为新、旧哈密顿函数，则

$$F^*(y,Y,\varepsilon)=F(x,X,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\Delta_W^n F)_{\varepsilon=0} \tag{8.173}$$

若用上标 n 表示 Δ_W 算子的 n 次运算 Δ_W^n，下标 0 表示 $\varepsilon=0$ 处的值，则(8.173)式可写为

$$F^*(y,Y,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}F_0^{(n)}. \tag{8.174}$$

如能求出新哈密顿函数展开式的系数 $F_0^{(n)}$，则由 (8.174) 式就能计算出新的哈密顿函数。

在(8.170)式中，$F(x,X,\varepsilon)$ 展为 ε 的幂级数，故 $\Delta_W^n F$ 在形式上也可以展为 ε 的幂级数，设 ε^k 项的系数为$\frac{1}{k!}F_k^{(n)}$，即

$$\Delta_W^n F=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k F_k^{(n)}. \tag{8.175}$$

由(8.170)和(8.171)式并利用级数乘法法则有：

$$\begin{aligned}
L_W F=\{F,W\}&=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k F_k,\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k W_{k+1}\right\}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k\sum_{r=0}^{k}C_k^r\{F_{k-r},W_{r+1}\}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k\sum_{r=0}^{k}C_k^r L_{r+1}F_{k-r}.
\end{aligned} \tag{8.176}$$

另外，由(8.162)、(8.170)和(8.176)式有：

$$\Delta_W F=\left(L_W+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)F=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k\left(F_{k+1}+\sum_{r=0}^{k}C_k^r L_{r+1}F_{k-r}\right). \tag{8.177}$$

在(8.175)式中，取 $n=1$，将它与(8.177)式比较 ε 的同次幂系数可得：

$$F_k^{(1)}=F_{k+1}+\sum_{r=0}^{k}C_k^r L_{r+1}F_{k-r} \tag{8.178}$$

但是

$$\begin{aligned}
\Delta_W^2 F=\Delta_W(\Delta_W F)&=\left(L_W+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k F_k^{(1)}\right)\\
&=L_W\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k F_k^{(1)}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k F_{k+1}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{8.179}$$

而 $L_W\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k F_k^{(1)}\right)=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k F_k^{(1)},\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k W_{k+1}\right\}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k\sum_{r=0}^{k}C_k^r\{F_{k-r}^{(1)},W_{r+1}\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k\sum_{r=0}^{k}C_k^r L_{r+1}F_{k-r}^{(1)}。$$

将它代入(8.179)式并与(8.175)式比较结果可得：

$$F_k^{(2)}=F_{k+1}^{(1)}+\sum_{r=0}^{k}C_k^r L_{r+1}F_{k-r}^{(1)}。\qquad(8.180)$$

对 F 进行 n 次 Δ_W 运算结果可得递推公式：

$$F_k^{(n)}=F_{k+1}^{(n-1)}+\sum_{r=0}^{k}C_k^r L_{r+1}F_{k-r}^{(n-1)}。\qquad(8.181)$$

而 $\Delta_W^0 F=F$，比较(8.170)和(8.175)式有。

$$F_k^{(0)}=F_k。\qquad(8.182)$$

在(8.175)式中置 $\varepsilon=0$，由(8.181)式可得：

$$F_0^{(n)}=(\Delta_W^n F)_{\varepsilon=0}=F_1^{(n-1)}+L_1F_0^{(n-1)}。\qquad(8.183)$$

由(8.181)—(8.183)式不难算出：

$$\left.\begin{aligned}
&F_0^{(0)}=F_0\\
&F_0^{(1)}=L_1F_0+F_1\\
&F_0^{(2)}=L_1F_0^{(1)}+F_1^{(1)}=(L_1^2+L_2)F_0\\
&\qquad\qquad+2L_1F_1+F_2\\
&F_0^{(3)}=L_1F_0^{(2)}+F_1^{(2)}=(L_1^3+2L_1L_2\\
&\qquad\qquad+L_2L_1+L_3)F_0+3(L_1^2\\
&\qquad\qquad+L_2)F_1+3L_1F_2+F_3
\end{aligned}\right\}\qquad(8.184)$$

……

利用(8.184)式如果知道旧哈密顿函数 $F(x,X,\varepsilon)$ 在小参数 $\varepsilon=0$ 即 $x=y$，$X=Y$ 处展为 ε 幂级数的系数 F_0、F_1、F_2、F_3、……和母函数展式的系数 W_1、W_2、W_3、…… 就可以算出新哈密

顿函数展式的系数 $F_0^{(n)}$。

如果令 F 就是 y 和 Y，由(8.170)式有：

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!}y_2 + \cdots; \quad Y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!}Y_2 + \cdots。$$

比较二边 ε 的同次幂系数显然可得：

$$y_0 = y,\ y_n = 0(n \geqslant 1);\ Y_0 = Y,\ Y_n = 0(n \geqslant 1) \quad (8.185)$$

利用(8.160)、(8.167)、(8.169)、(8.184)和(8.185)式可得新、旧变量之间关系为

$$\left.\begin{aligned} x &= E_W y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}y^{(n)}(y,Y) \\ X &= E_W Y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}Y^{(n)}(y,Y) \end{aligned}\right\}。\quad (8.186)$$

其中系数是

$$\left.\begin{aligned} y^{(0)} &= y_0 = y \\ y^{(1)} &= L_1 y_0 + y_1 = L_1 y = \{y, W_1\} = \frac{\partial W_1}{\partial Y} \\ y^{(2)} &= L_1^2 y + L_2 y = L_1\{y, W_1\} + \{y, W_2\} \\ &= \{L_1 y, W_1\} + \frac{\partial W_2}{\partial Y} = \frac{\partial W_2}{\partial Y} + \{y^{(1)}, W_1\} \\ y^{(3)} &= (L_1^3 + 2L_1L_2 + L_2L_1)y + L_3 y = L_1 y^{(2)} \\ &\quad + \{L_2 y, W_1\} + \{L_1 y, W_2\} + \{y, W_3\} \\ &= \frac{\partial W_3}{\partial Y} + \{y^{(2)}, W_1\} + \left\{\frac{\partial W_2}{\partial Y}, W_1\right\} \\ &\quad + \{y^{(1)}, W_2\} \\ &\cdots\cdots \\ Y^{(0)} &= Y \\ Y^{(1)} &= L_1 Y = -\frac{\partial W_1}{\partial y} \\ Y^{(2)} &= L_1^2 Y + L_2 Y = -\frac{\partial W_2}{\partial y} + \{Y^{(1)}, W_1\} \end{aligned}\right\}。\quad (8.187)$$

$$
\left.\begin{aligned}
Y^{(3)} &= L_1Y^{(2)} + (L_1L_2 + L_2L_1)Y + L_3Y \\
&= -\frac{\partial W_3}{\partial y} + \{Y^{(2)}, W_1\} + \left\{-\frac{\partial W_2}{\partial y}, W_1\right\} \\
&+ \{Y^{(1)}, W_2\}
\end{aligned}\right|
$$

与德洛勒-柴倍耳变换一样，李变换也是通过母函数来进行的。当然这样的母函数也是有无穷多个。但是，我们要选择合适的母函数，使得经过变换后的运动方程有较多的循环坐标，直到最后方程能够完全积分。如果母函数的形式已经确定，即由(8.171)式已知 W_1、W_2、……，则可利用(8.186)和(8.187)式确定新、旧变量之间的关系 $x = x(y, Y, W_1, W_2, \cdots\cdots, \varepsilon)$ 和 $X = X(y, Y, W_1, W_2, \cdots\cdots, \varepsilon)$。显然它们之间的关系是呈显函数形式。

§6 在非保守系中的李变换

在自然界中有许多摄动力是属于非保守性的。例如大气阻力、光压作用等对人造卫星的摄动不仅与卫星本身的位置 r 有关而且与时间 t 明显有关。当研究天体在这些非保守力系中运动时，需要将前面介绍的正则变换理论推广到非保守系统中去。下面主要介绍在非保守系中的李变换，对于德洛勒-柴倍耳变换也可以作类似的推广。

在非保守系中，相应的哈密顿函数 F，李变换的母函数 W 以及新、旧变量 y、Y 和 x、X 等都显含时间 t。为了要将正则变量，正则方程和正则变换推广到非保守系中，我们可以将原来 $2m$ 维相空间 (y, Y) 扩充到新的 $2m+2$ 维状态-能量空间。这个 $2m+2$ 维空间又称为动量-能量空间。如果这个新空间用 (v, V) 来表示，我们取

$$
v_j = y_j, \quad V_j = Y_j. \qquad (j = 1, 2, \cdots m) \tag{8.188}
$$

则可以将时间 t 和哈密顿函数 $H(y, Y, t)$ 当作第 $m+1$ 个广义坐标和广义动量即令

$$v_{m+1}=t,\ V_{m+1}=-H。\tag{8.189}$$

这时可以取这扩充相空间中的哈密顿函数为

$$\Gamma(v,V)=V_{m+1}+H(v_1,\cdots\cdots v_m,v_{m+1},V_1,\cdots V_m)。\tag{8.190}$$

不难看出在这 $2m+2$ 维状态-能量空间中，天体的运动方程形式仍是正则的，即有

$$\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial\Gamma}{\partial V_j},\ \frac{\mathrm{d}V_j}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial v_j}。\qquad(j=1,2,\cdots,m,m+1)\tag{8.191}$$

其中 τ 是自变量。事实上

当 $j=m+1$ 时，$\frac{\mathrm{d}v_{m+1}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial\Gamma}{\partial V_{m+1}}$。由(8.189) 和 (8.190)式知道这式是$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1$，因此只要取 $\tau=t+\mathrm{const.}$ 即可。$\frac{\mathrm{d}V_{m+1}}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial v_{m+1}}$即 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}$，这显然是成立的，因为$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial y}\times\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}$。

当 $j=1,2,\cdots m$ 时即回到 $2m$ 维相空间中，$\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial\Gamma}{\partial V_j}\longrightarrow\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial Y_j}$，$\frac{\mathrm{d}V_j}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\partial\Gamma}{\partial v_j}\longrightarrow\frac{\mathrm{d}Y_j}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial y_j}(j=1,2,\cdots m)$自然也成立，故(8.191)式成立。

我们在 $2m$ 维相空间中已经定义了泊松括号和李导数 $L_Wf=\{f,W\}$，它是(8.160)式。同样在这 $2m+2$ 维的扩充相空间中也可以定义泊松括号和李导数是:

$$\Lambda_Wf=\sum_{j=1}^{m+1}\left(\frac{\partial f}{\partial v_j}\frac{\partial W}{\partial V_j}-\frac{\partial f}{\partial V_j}\frac{\partial W}{\partial v_j}\right)=\sum_{j=1}^{m+1}\frac{\partial(f,W)}{\partial(v_j,V_j)}。\tag{8.192}$$

利用李导数同样可以定义另外一个微分算子:

$$\nabla_Wf=\left(\Lambda_W+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)f。\tag{8.193}$$

和

$$\Pi_W f = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\nabla_W^n f)_{\varepsilon=0}.\tag{8.194}$$

这时相应于(8.167)式的李变换是:

$$u = \Pi_W v,\quad U = \Pi_W V.\tag{8.195}$$

其中

$$u_j = x_j,\quad U_j = X_j.\quad (j = 1,2,\cdots m)\tag{8.196}$$

和

$$u_{m+1} = t,\quad U_{m+1} = -K.\tag{8.197}$$

由于母函数显含 t，故

$$W = W(y,Y,t) = W(v_1,\cdots v_m,v_{m+1},V_1,V_m).\tag{8.198}$$

利用(8.192)、(8.193)和(8.198)式可得:

$$\nabla_W t = \left(\Lambda_W + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)t = \Lambda_W t = \Lambda_W v_{m+1} = \frac{\partial W}{\partial V_{m+1}} = 0.\tag{8.199}$$

对于 $2m+2$ 维扩充相空间中的任意一个函数 $f(v,V)$，利用(8.162)、(8.189)、(8.192)、(8.193)和(8.198)式可得:

$$\begin{aligned}\nabla_W f &= \Delta_W f + \frac{\partial f}{\partial v_{m+1}}\frac{\partial W}{\partial V_{m+1}} - \frac{\partial f}{\partial V_{m+1}}\frac{\partial W}{\partial v_{m+1}}\\ &= \left(\Delta_W + \frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial}{\partial H}\right)f.\end{aligned}\tag{8.200}$$

由于 $H = -V_{m+1}$，$\Delta_W H = -\left(L_W + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)V_{m+1} = 0$，故由(8.200)式有

$$\nabla_W H = \frac{\partial W}{\partial t}.\tag{8.201}$$

但是 $W = W(y,Y,t) = W(v_1,\cdots v_m,v_{m+1},V_1,\cdots V_m)$与 V_{m+1} 或者H无关．同样$\frac{\partial W}{\partial t}$也是 y，Y和 t 的函数，与H无关即

$\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial H}=0$。这样由(8.201)式有:

$$\nabla_W^2 H=\nabla_W(\nabla_W H)=\left(\Delta_W+\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial}{\partial H}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)=\Delta_W\frac{\partial W}{\partial t}。\tag{8.202}$$

连续施行结果,显然可得:

$$\nabla_W^n H=\Delta_W^{n-1}\frac{\partial W}{\partial t}。\tag{8.203}$$

在(8.195)式中,我们取 $j=1,2,\cdots\cdots m$ 就还原到 $2m$ 维相空间中的李变换 (8.167) 式。 如取 $j=m+1$, 则有$u_{m+1}=\Pi_W v_{m+1}$ 和 $U_{m+1}=\Pi_W V_{m+1}$ 或者是:

$$S=\Pi_W t,\tag{8.204}$$

和

$$K=\Pi_W H。\tag{8.205}$$

利用(8.194)和(8.199)式,由(8.204)式可得:

$$S=\nabla_W^0 t=t。\tag{8.206}$$

利用(8.194)和(8.203)式,由(8.205)式可得:

$$\begin{aligned}K&=\nabla_W^0 H+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\nabla_W^n H)_{\varepsilon=0}\\&=H+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left(\Delta_W^{n-1}\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\varepsilon=0}。\end{aligned}\tag{8.207}$$

由(8.197)式知道K是关于旧变量 x、X的哈密顿函数,我们仍记为 $F(x,X,t,\varepsilon)$。由(8.189)式知道H是经李变换后变为新变量 y、Y的哈密顿函数,我们也仍记为$F^*(y,Y,t,\varepsilon)$。这时(8.207)式成为

$$F^*(y,Y,t,\varepsilon)=F(x,X,t,\varepsilon)+R(y,Y,t,\varepsilon)。\tag{8.208}$$

其中 $R(y,Y,t,\varepsilon)$ 称为余函数,它是由于显含时间 t 所产生的,由(8.207)式有:

$$R(y,Y,t,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left(\Delta_W^{n-1}\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\varepsilon=0}。\tag{8.209}$$

(8.208)式是在显含 t 的李变换中，新、旧哈密顿函数之间关系．如果求出了余函数 R，则可利用该式求出新的哈密顿函数．

与(8.171)式类似，通常变换母函数 $W(y,Y,t,\varepsilon)$ 也能展开成 ε 的幂级数，即有

$$W(y,Y,t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}W_{n+1}(y,Y,t)。\qquad(8.210)$$

这样 $\Delta_W^k\frac{\partial W}{\partial t}$ 在形式上也能展开成 ε 的幂级数，关于 ε^n 项的系数记为 $\frac{1}{n!}S_n^{(k)}(y,Y,t)$，即有

$$\Delta_W^k\frac{\partial W}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}S_n^{(k)}(y,Y,t)。\qquad(8.211)$$

由(8.211)式有 $\left(\Delta_W^{n-1}\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\varepsilon=0}=S_0^{(n-1)}(y,Y,t)$，因此(8.209)式又可写为

$$R(y,Y,t,\varepsilon)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}S_0^{(n-1)}(y,Y,t)。\qquad(8.212)$$

在(8.211)式中，置 $k=0$ 有 $\Delta_W^0\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}S_n^{(0)}$，再利用(8.210)式可得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{\partial W_{n+1}}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}S_n^{(0)}$，比较二边 ε 同次幂的系数有：

$$S_{n-1}^{(0)}=\frac{\partial W_n}{\partial t}。\qquad(8.213)$$

另外，将(8.211)式与(8.175)式相比较，显然 $S_n^{(k)}$ 与 $F_k^{(n)}$ 一样应当也有形如(8.181)式的递推公式：

$$S_n^{(k)}=S_{n+1}^{(k-1)}+\sum_{r=0}^{n}C_n^rL_{r+1}S_{n-r}^{(k-1)}-S_{n+1}^{(k-1)}$$

$$+\sum_{r=0}^{n}C_n^r\{S_{n-r}^{(k-1)},W_{r+1}\}。\tag{8.214}$$

我们可以把新、旧哈密顿函数和余函数都展为 ε 的幂级数:

$$F^*(y,Y,t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}F^{*(n)}(y,Y,t)。\tag{8.215}$$

$$F(x,X,t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}F^{(n)}(y,Y,t)。\tag{8.216}$$

和

$$R(y,Y,t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}R^{(n)}(y,Y,t)。\tag{8.217}$$

由(8.173)和(8.174)式知道旧哈密顿函数 F 展开式的系数是

$$F^{(n)}=F_0^{(n)}(y,Y,t)。\tag{8.218}$$

其中 $F_0^{(n)}$ 的形式与(8.184)式完全相同，$F_0,F_1,\cdots\cdots$是 F 展为小参数 ε 相应的系数,只是它们都显含时间 t。

由(8.212)式知道余函数 R 展开式的系数是:

$$R^{(n)}=-S_0^{(n-1)}(y,Y,t),\tag{8.219}$$

利用(8.213)、(8.214)和(8.219)式可以求出诸 $R^{(n)}$，它们是

$$\left.\begin{aligned}
R^{(1)}&=-S_0^{(0)}=-\frac{\partial W_1}{\partial t}\\
R^{(2)}&=-S_0^{(1)}=-(S_1^{(0)}+L_1S_0^{(0)})\\
&=-\left(\frac{\partial W_2}{\partial t}+L_1\frac{\partial W_1}{\partial t}\right)\\
R^{(3)}&=-S_0^{(2)}=-(S_1^{(1)}+L_1S_0^{(1)})=-(S_2^{(0)}+L_1S_1^{(0)}\\
&\quad+L_2S_0^{(0)})-L_1S_0^{(1)}=-\left(\frac{\partial W_3}{\partial t}+L_1\frac{\partial W_2}{\partial t}\right.\\
&\quad\left.+L_2\frac{\partial W_1}{\partial t}\right)-L_1\left(\frac{\partial W_2}{\partial t}+L_1\frac{\partial W_1}{\partial t}\right)=-\\
&\quad\left(\frac{\partial W_3}{\partial t}+2L_1\frac{\partial W_2}{\partial t}+L_2\frac{\partial W_1}{\partial t}+L_1^2\frac{\partial W_1}{\partial t}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{8.220}$$

$\cdots\cdots$。

将(8.215)—(8.217)式代入(8.208)式后比较ε同次幂的系数，可得在显含t的李变换中新哈密顿函数展开式的系数是:

$$F^{*(n)}=F^{(n)}+R^{(n)}. \tag{8.221}$$

将(8.184)、(8.218)和(8.220)式代入(8.221)式后，可得这些系数是:

$$\left.\begin{aligned}
F^{*(1)}&=F^{(1)}+R^{(1)}=F_1+L_1F_0-\frac{\partial W_1}{\partial t}\\
F^{*(2)}&=F^{(2)}+R^{(2)}=F_2+2L_1F_1+(L_2+L_1^2)F_0\\
&\quad-\frac{\partial W_2}{\partial t}-L_1\frac{\partial W_1}{\partial t}\\
F^{*(3)}&=F^{(3)}+R^{(3)}=F_3+3L_1F_2+3(L_2+L_1^2)F_1\\
&\quad+(L_3+L_2L_1+2L_1L_2+L_1^3)F_0-\frac{\partial W_3}{\partial t}\\
&\quad-2L_1\frac{\partial W_2}{\partial t}-(L_2+L_1^2)\frac{\partial W_1}{\partial t}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}. \tag{8.222}$$

将(8.222)式代入(8.215)式后就可以算出显含t时的新哈密顿函数$F^*(y,Y,t)$。

与(8.186)式相类似可得在显含t的李变换中新、旧变量之间关系是:

$$\left.\begin{aligned}
x&=\Pi_W y=E_W y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}y^{(n)}(y,Y,t)\\
X&=\Pi_W Y=E_W Y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}Y^{(n)}(y,Y,t)
\end{aligned}\right\}. \tag{8.223}$$

其中系数$y^{(n)}$和$Y^{(n)}$的形式和(8.187)式完全一样，只是由于变换母函数W是y、Y和t的函数，因此$y^{(n)}$和$Y^{(n)}$也是y、Y和t的函数。由(8.223)式可以看出在显含t的李变换中，新、旧变量之间关系也是同样呈现显函数形式。

§7 用李变换求 J_2 和 J_2^2 项的摄动

利用李变换理论来研究人造卫星运动时与德洛勒-柴倍耳变换一样也是通过二次正则变换,相继消除短周期项和长周期项,使得经过变换后的新的哈密顿函数出现有三个循环坐标,从而得到运动方程的解。本节介绍求 J_2 和 J_2^2 项的摄动,对于其它 $J_n(n \geq 3)$ 项的摄动可以采用与本节同样的方法求出。

1. 第一次李变换(消去 l)

在李变换中,仍然采用德洛勒变量。这时的旧变量 x 用 L、G、H 来表示,X 用 l、g、h 来表示。新变量 y 用 L'、G'、H' 来表示,Y 用 l'、g'、h' 来表示。我们可以用 J_2 当作为小参数 ε。当忽略 J_3 及其以上项时,由(8.66)式可得这时的哈密顿函数:

$$F = F_0 + J_2F_1。\qquad (8.224)$$

其中

$$F_0 = \frac{1}{2L^2},\qquad (8.225)$$

$$F_1 = -\frac{1}{r^3}P_2(\sin\varphi) = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3(1 - 3\sin^2\varphi)。\qquad (8.226)$$

同样我们可以把 F_1 通过对平近点角 M 求平均值分为常数部分 F_{1c} 和短周期部分 F_{1s}。注意到(8.70)和(8.226)式之间差别仅是系数 J_2,故由(8.72)和(8.73)式立即可得这里的:

$$F_{1c} = \frac{A}{2L^6}\left(\frac{L}{G}\right)^3\qquad (8.227)$$

和

$$F_{1s} = \frac{1}{2L^6}(A\sigma_1 + B\sigma_2)。\qquad (8.228)$$

其中 A、B、σ_1 和 σ_2 的表示式是(8.74)和(8.75)式。

由于这时不显含时间 t,故利用(8.167)式进行第一次李变换。我们应当选择这样的母函数:

$$W(y,Y,J_2)=W_1(y,Y)+J_2W_2(y,Y)+\frac{J_2^2}{2!}W_3(y,Y)$$

$$+\cdots\cdots。\tag{8.229}$$

使得变换后的新的哈密顿函数 $F^*(y,Y,J_2)$不再含 l'。由(8.174)式可得这时的:

$$F^*(L',G',H',g',J_2)=F_0^*(L',G',H',g')+J_2F_1^*(L',G',H',g')+\frac{J_2^2}{2!}F_2^*(L',G',H',g')+\cdots\cdots。\tag{8.230}$$

其中系数 F_n^* 利用(8.184)式并考虑到 $F_2=F_3=\cdots\cdots=0$ 可以算出是:

$$F_0^*=F_0^{(0)}=F_0(L')。\tag{8.231}$$

$$F_1^*=F_0^{(1)}=L_1F_0+F_1(L',G',H',l',g')。\tag{8.232}$$

$$F_2^*=F_0^{(2)}=(L_1^2+L_2)F_0+2L_1F_1。\tag{8.233}$$

$\cdots\cdots$

由(8.225)式立即可得:

$$F_0^*=\frac{1}{2L'^2}。\tag{8.234}$$

由于$L_1F_0=\{F_0,W_1\}=\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial W_1}{\partial l'}+\cdots\cdots-\frac{\partial F_0}{\partial l'}\frac{\partial W_1}{\partial L'}-\cdots\cdots=-\frac{1}{L'^3}\frac{\partial W_1}{\partial l'}$，但是 l' 是平近点角 M'，故$\frac{\partial W_1}{\partial l'}$是纯短周期项（$l'$ 仅出现在三角函数中）。这意味着 L_1F_0 是短周期项，同样 $L_2F_0=\{F_0,W_2\}=-\frac{1}{L'^3}\frac{\partial W_2}{\partial l'}$也是短周期项。我们比较(8.232)和(8.233)式二边常数部分(不含l'项)和短周期部分(含l'项)分别可得:

$$F_1^*=F_{1c}(L',G',H')=\frac{A'}{2L'^3G'^3}。\tag{8.235}$$

$$0=F_{1s}(L',G',H',l',g')+L_1F_0。\tag{8.236}$$

$$F_2^*=\{L_1^2F_0+2L_1F_1\}_{c.}=\overline{L_1^2F_0+2L_1F_1}。\tag{8.237}$$

$$0 = L_2F_0 + \{L_1^2F_0 + 2L_1F_1\}_{s}. \tag{8.238}$$

其中$\{\ \ \}_{s.s.}$和$\{\ \ \}_s$分别表示取花括号内各项的非短周期项和短周期项。利用(8.234)和(8.235)式算出新哈密顿函数展开式中J_2的零次和一次幂的系数F_0^*和F_1^*;利用(8.236)式可以算出变换母函数W展开式中J_2零次幂的系数W_1。由(8.228)式显然有:

$$\frac{\partial W_1}{\partial l'} = \frac{1}{2L'^3}(A'\sigma_1' + B'\sigma_2'). \tag{8.239}$$

其中A'、B'、σ_1'和σ_2'是在(8.74)和(8.75)式中将变量L、G、H、l和g改为L'、G'、H'、l'和g'。

将(8.239)式和(8.91)式相比较，如果将S_1中的l和g改为l'和g'，就有$W_1 = \frac{S_1}{J_2}$。这样我们可以利用(8.94)式得到(8.239)式的积分结果是:

$$W_1 = \frac{1}{2G'^3}\Big\{A'[(f' - l') + e'\sin f'] + B'\Big[\frac{e'}{2}\sin(f' + 2g') + \frac{1}{2}\sin 2(f' + g') + \frac{e'}{6}\sin(3f' + 2g')\Big]\Big\}. \tag{8.240}$$

利用(8.238)式可以算出变换母函数展开式中J_2的一次幂的系数W_2，它是用来求二阶短周期项的，我们暂且不考虑。利用(8.237)式可以算出新哈密顿函数展开式中J_2的二次幂的系数(差因子$\frac{1}{2!}$)F_2^*。

由(8.236)式有$L_1F_0 = -F_{1s}$，而W_1和F_1均不含h'，故有

$$L_1^2F_0 + 2L_1F_1 = \{-F_{1s}, W_1\} + 2\{F_1, W_1\}$$
$$= \{F_1 + F_{1c}, W_1\} = \frac{\partial(F_1 + F_{1c})}{\partial L'}\frac{\partial W_1}{\partial l'} + \frac{\partial(F_1 + F_{1c})}{\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'} - \frac{\partial(F_1 + F_{1c})}{\partial l'}$$

$$\times \frac{\partial W_1}{\partial L'} - \frac{\partial(F_1 + F_{1c})}{\partial g'} \frac{\partial W_1}{\partial G'}. \qquad (8.241)$$

为了要求出 $F_2^* = \overline{L_1^2 F_0 + 2L_1 F_1}$，需要对(3.241)式右端四项求平均值.

$\frac{\partial W_1}{\partial l'}$ 是纯短周期项，$\overline{\frac{\partial W_1}{\partial l'}} = 0$，但 F_{1c} 和 $\frac{\partial F_{1c}}{\partial L'}$是常数项，故(8.241)式右端第一项在对$M$求平均值时 $F_1 + F_{1c}$ 只剩下 F_{1l}. 由(8.235)式知道 F_{1c} 仅含 L'、G' 和 H' 而与 l' 和 g' 无关即有 $\frac{\partial F_{1c}}{\partial l'} = \frac{\partial F_{1c}}{\partial g'} = 0$，因此(8.241)式右端第三和第四项在求平均值时 $F_1 + F_{1c}$ 也只剩下 F_{1l}，这样由(8.241)式有:

$$F_2^* = \overline{\frac{\partial F_{1l}}{\partial L'} \frac{\partial W_1}{\partial l'}} + \overline{\frac{\partial F_{1l}}{\partial G'} \frac{\partial W_1}{\partial g'}} - \overline{\frac{\partial F_{1l}}{\partial l'} \frac{\partial W_1}{\partial L'}}$$

$$- \overline{\frac{\partial F_{1l}}{\partial g'} \frac{\partial W_1}{\partial G'}} + 2\overline{\frac{\partial F_{1c}}{\partial G'} \frac{\partial W_1}{\partial g'}} \qquad (8.242)$$

由于 $F_{1l} = -L_1 F_0 = \frac{1}{L'^3} \frac{\partial W_1}{\partial l'}$，故得:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_{1l}}{\partial L'} \frac{\partial W_1}{\partial l'} &= \frac{1}{L'^3} \frac{\partial^2 W_1}{\partial l' \partial L'} \frac{\partial W_1}{\partial l'} - \frac{3}{L'^4}\left(\frac{\partial W_1}{\partial l'}\right)^2 \\
\frac{\partial F_{1l}}{\partial G'} \frac{\partial W_1}{\partial g'} &= \frac{1}{L'^3} \frac{\partial^2 W_1}{\partial l' \partial G'} \frac{\partial W_1}{\partial g'} \\
\frac{\partial F_{1l}}{\partial l'} \frac{\partial W_1}{\partial L'} &= \frac{1}{L'^3} \frac{\partial^2 W_1}{\partial l'^2} \frac{\partial W_1}{\partial L'} \\
\frac{\partial F_{1l}}{\partial g'} \frac{\partial W_1}{\partial G'} &= \frac{1}{L'^3} \frac{\partial^2 W_1}{\partial l' \partial g'} \frac{\partial W_1}{\partial G'}
\end{aligned}\right\}. \qquad (8.243)$$

我们知道$\frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{\partial W_1}{\partial l'} \frac{\partial W_1}{\partial L'}\right)$是纯短周期项，因此

$$\overline{\frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{\partial W_1}{\partial l'} \frac{\partial W_1}{\partial L'}\right)} = \overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'^2} \frac{\partial W_1}{\partial L'}} + \overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l' \partial L'} \frac{\partial W_1}{\partial l'}} = 0,$$

由此可得:

$$\overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'^2}\frac{\partial W_1}{\partial L'}}=-\overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'\partial L'}\frac{\partial W_1}{\partial l'}}. \tag{8.244}$$

利用(8.243)的第一式和(8.244)式,(8.243)的第三式变为

$$\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial l'}\frac{\partial W_1}{\partial L'}}=-\frac{1}{L'^3}\overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'\partial L'}\frac{\partial W_1}{\partial l'}}$$

$$=-\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial L'}\frac{\partial W_1}{\partial l'}}-\frac{3}{L'^4}\overline{\left(\frac{\partial W_1}{\partial l'}\right)^2}. \tag{8.245}$$

同样$\frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{\partial W_1}{\partial g'}\frac{\partial W_1}{\partial G'}\right)$也是纯短周期项，有 $\overline{\frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{\partial W_1}{\partial g'}\frac{\partial W_1}{\partial G'}\right)}$ $=\overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'\partial g'}\frac{\partial W_1}{\partial G'}}+\overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'}}=0$，由此可得:

$$\overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'\partial g'}\frac{\partial W_1}{\partial G'}}=-\overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'}}. \tag{8.246}$$

利用(8.243)的第二式和(8.246)式，(8.243)的第四式变为

$$\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial g'}\frac{\partial W_1}{\partial G'}}=-\frac{1}{L'^3}\overline{\frac{\partial^2 W_1}{\partial l'\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'}}=-\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'}}. \tag{8.247}$$

将(8.245)和(8.247)式代入(8.242)式，并以$\frac{3}{L'^4}=\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}$代之可得:

$$F_2^*=2\left[\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial L'}\frac{\partial W_1}{\partial l'}}+\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'}}+\overline{\frac{\partial F_{1s}}{\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'}}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2L'^4}\overline{\left(\frac{\partial W_1}{\partial l'}\right)^2}\right]=2\left[\overline{\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial W_1}{\partial l'}}+\overline{\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\overline{\left(\frac{\partial W_1}{\partial l'}\right)^2}\right]. \tag{8.248}$$

我们知道李变换中母函数 W_1 相当于德洛勒-柴倍耳变换中母函数 S_1 除以 J_2 并将 S_1 中的变量 l 和 g 改为 l' 和 g'，哈密顿函数 F_0 完全相等，F_1 也是相差因子 $\frac{1}{J_2}$，因此比较(8.95)和(8.248)式可以得出这样的结果：李变换中的 F_2^* 相当于德洛勒-柴倍耳变换中的 F_2^* 再乘以 $\frac{2!}{J_2^2}$。这个结果是明显的，因为在李变换中新哈密顿函数 F^* 是按(8.230)式展开的，而在德洛勒-柴倍耳变换中 F^* 是按(8.79)式展开的，它们之间相差常数因子 $\frac{J_2^n}{n!}$。这样我们可以采用与德洛勒-柴倍耳变换中计算这些函数平均值的同样方法来计算(8.248)式右端这三项的值。但为了方便起见，我们就直接引用(8.129)和(8.130)式得到(8.248)式的结果是：

$$
\begin{aligned}
F_2^* = \frac{3}{64L'^{10}}\left(\frac{L'}{G'}\right)^5 \Bigg\{ & \left[5 - 18\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 5\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right] \\
& + 4\left[1 - 6\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 9\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\left(\frac{L'}{G'}\right) \\
& - 5\left[1 - 2\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 - 7\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\left(\frac{L'}{G'}\right)^2 + 2e'^2 \\
& \left[1 - 16\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 15\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\left(\frac{L'}{G'}\right)^2 \cos 2g' \Bigg\}. \quad (8.249)
\end{aligned}
$$

将(8.240)式代入(8.186)和(8.187)式后可以得到新、旧变量之间的关系是：

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= y + J_2 \frac{\partial W_1}{\partial Y} + \cdots\cdots \\
X &= Y - J_2 \frac{\partial W_1}{\partial y} + \cdots\cdots
\end{aligned}
\right\}. \quad (8.250)
$$

在(8.250)式中，x 和 X 分别是 L、G、H 和 l、g、h；y 和 Y 分别是 L'、G'、H' 和 l'、g'、h'。由于 W_1 相当于 $\frac{S_1}{J_2}$，这样 $J_2\frac{\partial W_1}{\partial Y}$ 相

当于$\frac{\partial S_1}{\partial l'}$、$\frac{\partial S_1}{\partial g'}$、$\frac{\partial S_1}{\partial h'}$ 和 $J_2\frac{\partial W_1}{\partial y}$ 相当于 $\frac{\partial S_1}{\partial L'}$、$\frac{\partial S_1}{\partial G'}$、$\frac{\partial S_1}{\partial H'}$，因此(8.250)式可具体写为

$$\left.\begin{array}{l} L = L' + L_s, \quad G = G' + G_s, \quad H = H' \\ l = l' + l_s, \quad g = g' + g_s, \quad h = h' + h_s \end{array}\right\}. \tag{8.251}$$

其中 L_s、G_s、l_s、g_s 和 h_s 的表示式就是(8.99)式，所不同的是这里变量本身就是 l' 和 g'，而(8.99)式是在忽略二阶短周期项时将变量 l 和 g 改写为 l' 和 g' 的．$L_s, \cdots\cdots h_s$ 就是我们所要求的一阶短周期项和部分长周期项．

2. 第二次李变换(消去 g')

在第二次李变换中，旧变量 x 和 X 分别是 L'、G'、H' 和 l'、g'、h'；新变量 y 和 Y 分别是 L''、G''、H'' 和 l''、g''、h''．由于不显含时间 t，我们仍采用(8.167)式进行第二次李变换．这时应当选择这样的母函数：

$$W^*(y, Y, J_2) = W_1^*(y, Y) + J_2 W_2^*(y, Y) + \frac{J_2^2}{2!} W_3^*(y, Y) + \cdots\cdots, \tag{8.252}$$

使得变换后的新的哈密顿函数 $F^{**}(y, Y, J_2)$ 既不含 l'' 也不含 g''．由(3.174)式同样有：

$$F^{**}(L'', G'', H'', J_2) = F_0^{**}(L'', G'', H'') + J_2 F_1^{**}(L'', G'', H'') + \frac{J_2^2}{2!} F_2^{**}(L'', G'', H'') + \cdots\cdots. \tag{8.253}$$

其中系数 F_n^{**} 可以利用(8.184)式算出是：

$$F_0^{**} = F_0^*(L''). \tag{8.254}$$

$$F_1^{**} = L_1 F_0^* + F_1^*(L'', G'', H''). \tag{8.255}$$

$$F_2^{**} = (L_1^2 + L_2) F_0^* + 2L_1 F_1^* + F_2^*(L'', G'', H'', g''). \tag{8.256}$$

由(8.234)式立即可得：

$$F_0^{**} = \frac{1}{2L''^2}. \tag{8.257}$$

由于第二次李变换的变换母函数 W^* 是通过 F^* 求得的，但是 F^* 不含 l'' 和 h''，故 W^* 也不含 l'' 和 h''，即 $W^*(y,Y,J_2) = W^*(L'',G'',H'',g'',J_2)$。于是有

$$\left.\begin{aligned}
&L_1F_0^* = \{F_0^*,W_1^*\} = \frac{\partial F_0^*}{\partial L''}\frac{\partial W_1^*}{\partial l''} = 0\\
&L_1^2F_0^* = 0\\
&L_2F_0^* = \{F_0^*,W_2^*\} = \frac{\partial F_0^*}{\partial L''}\frac{\partial W_2^*}{\partial l''} = 0\\
&L_1F_1^* = \{F_1^*,W_1^*\} = \frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\frac{\partial W_1^*}{\partial g''}
\end{aligned}\right\}. \tag{8.258}$$

利用(8.258)的第一式，由(8.235)和(8.255)式可得：

$$F_1^{**} = F_1^*(L'',G'',H'') = \frac{A''}{2L''^3G''^3}. \tag{8.259}$$

其中 $A'' = \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 - 1\right]$。

由于$\frac{\partial W_1^*}{\partial g''}$是纯长周期项，故 $L_1F_1^*$ 也是纯长周期项。F_1^{**}不含 l'' 和 g'' 即为常数项。但由(8.249)式知道 F_2^* 包含有常数项 F_{2c}^* 和长周期项 F_{2l}^* 即：

$$F_2^* = F_{2c}^* + F_{2l}^*. \tag{8.260}$$

其中

$$\begin{aligned}
F_{2c}^* = &-\frac{3}{64L'^{10}}\left(\frac{L'}{G'}\right)^5\left\{\left[5 - 18\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 5\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\right.\\
&+ 4\left[1 - 6\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 9\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\left(\frac{L'}{G'}\right)\\
&\left.- 5\left[1 - 2\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 - 7\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\left(\frac{L'}{G'}\right)^2\right\}.
\end{aligned} \tag{8.261}$$

$$F_{2l}^* = \frac{3e'^2}{32L'^{10}}\left(\frac{L'}{G'}\right)^7\left[1 - 16\left(\frac{H'}{G'}\right)^2 + 15\left(\frac{H'}{G'}\right)^4\right]\cos 2g'. \tag{8.262}$$

比较(8.256)式二边常数部分和长周期部分并利用(8.258)的第二、三、四式，(3.260)和(8.261)式可得：

$$F_1^{**} = F_{2s}^*(L'', G'', H'') = \frac{3}{64L''^{10}}\left(\frac{L''}{G''}\right)^5 \left\{\left[5 - 18\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 + 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right] + 4\left[1 - 6\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 + 9\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right] \times \left(\frac{L''}{G''}\right) - 5\left[1 - 2\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 - 7\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right]\left(\frac{L''}{G''}\right)^2\right\}. \tag{8.263}$$

和

$$0 = 2\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\ \frac{\partial W_1^*}{\partial g''} + F_{2l}^*(L'', G'', H'', g''). \tag{8.264}$$

由(8.259)式有 $\frac{\partial F_1^*}{\partial G''} = \frac{3}{4L''^3G''^4}\left[1 - 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]$. 利用该式与(8.262)式，将(8.264)式对 g'' 积分后可得变换母函数展开式中零次幂项:

$$W_1^* = -\frac{e''^2}{32G''^3}\left[1 - 16\left(\frac{H''}{G''}\right)^2 + 15\left(\frac{H''}{G''}\right)^4\right] \times \left[1 - 5\left(\frac{H''}{G''}\right)^2\right]^{-1} \sin 2g''. \tag{8.265}$$

由(8.186)和(8.187)式可得经过第二次李变换后新、旧变量之间关系为

$$\left.\begin{aligned} x &= y + J_2\frac{\partial W_1^*}{\partial Y} + \cdots\cdots \\ X &= Y - J_2\frac{\partial W_1^*}{\partial y} + \cdots\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{8.266}$$

比较(8.133)和(8.265)式，我们可以发现如在 S_1^* 中将 g' 改为 g'' 则有 $W_1^* = \frac{S_1^*}{J_2}$. 于是(8.266)式中的 $J_2\frac{\partial W_1^*}{\partial Y}$ 相当于德洛勒-柴倍耳变换中的 $\frac{\partial S_1^*}{\partial l'}$、$\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}$、$\frac{\partial S_1^*}{\partial h'}$ 和 $J_2\frac{\partial W_1^*}{\partial y}$ 相当于 $\frac{\partial S_1^*}{\partial L''}$、$\frac{\partial S_1^*}{\partial G''}$、$\frac{\partial S_1^*}{\partial H''}$. 这样(8.266)式可以具体写为

$$\left.\begin{array}{l} L' = L'', \quad G' = G'' + G_l, H' = H'' \\ l' = l'' + l_l, \; g' = g'' + g_l, \; h' = h'' + h_l \end{array}\right\}. \quad (8.267)$$

其中 G_l、l_l、g_l 和 h_l 的表示式就是(8.135)式，所不同的是这里变量本身就是 g''，而 (8.135) 式是在忽略二阶长周期项时将变量 g' 改写为 g'' 的。G_l、l_l、g_l 和 h_l 就是我们所要求的其余一阶长周期项。

3. J_2 的一阶解

经过二次李变换后，所有广义坐标 l''、g'' 和 h'' 都成为循环坐标了，运动方程可以完全积分。将(8.257)、(8.259)和(8.263)式代入 (8.253) 式后可得经过二次李变换后的新的哈密顿函数 $F^{**} = F^{**}(L'', G'', H'', J_2)$。将它代入正则方程有：

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dL''}{dt} = \dfrac{dG''}{dt} = \dfrac{dH''}{dt} = 0 \\ \dfrac{dl''}{dt} = -\dfrac{\partial F^{**}}{\partial L''}, \; \dfrac{dg''}{dt} = -\dfrac{\partial F^{**}}{\partial G''} \\ \dfrac{dh''}{dt} = -\dfrac{\partial F^{**}}{\partial H''} \end{array}\right\}. \quad (8.268)$$

将 (8.257)、(8.259) 和 (8.263)式分别与(8.110)、(8.111)和(8.131)式相比较，我们可以发现二者形式完全相同，只是后者分别多了常数因子 $(J_2)^0$、J_2 和 $\dfrac{J_2^2}{2!}$。因此由它们所构成的 (8.253) 和 (8.101) 式即经过二次李变换后的新的哈密顿函数和经过二次柴倍耳变换后的新的哈密顿函数 F^{**} 完全一样，因此(8.268)式右端系数就是(8.136)式，对时间 t 的积分结果就是(8.137)式。由此可得在李变换中 J_2 项的一阶解是：

$$\left.\begin{array}{ll} L = L_0'' + L_s, & l = l_0'' + l_s + l_l + \dfrac{dl''}{dt}(t - t_0) \\ G = G_0'' + G_s + G_l, & g = g_0'' + g_s + g_l + \dfrac{dg''}{dt}(t - t_0) \\ H = H_0'', & h = h_0'' + h_s + h_l + \dfrac{dh''}{dt}(t - t_0) \end{array}\right\}.$$

(8.269)

其中 L_0''，……h_0'' 是初始值；L_s，……h_s 是一阶短周期项和部分长周期项；G_l，……h_l 是其余的一阶长周期项；$\frac{dl''}{dt}$、$\frac{dg''}{dt}$ 和$\frac{dh''}{dt}$是准到二阶的长期项系数。它们的表示式分别与（8.99）、(8.135)和(8.136)式相同。

如果将（8.269）式转换成利用轨道根数 σ 来表示，我们由(8.139)、(8.140)和(8.141)式可得结果与(8.145)式一样，其中 a_s，……M_s、e_l，……M_l 和 Ω_1，……M_2 等为(8.142)、(8.143)和(8.144)式所示。

4. 李变换和德洛勒-柴倍耳变换之间的差别和关系

由前面可以看出李变换与德洛勒－柴倍耳变换不同的是：在李变换中，变换的母函数和变换后的哈密顿函数都是按小参数$\frac{\varepsilon^n}{n!}$展开的，这时二者展式的系数相差常数因子$\frac{\varepsilon^n}{n!}$，但总的变换母函数和哈密顿函数都是一样的。1970年堀源一郎证明了李变换与德洛勒-柴倍耳变换是完全等价的。但是李变换与柴倍耳变换还是有一定差别的，这些差别反映着李变换的一些优点。(1) 在李变换中，新、旧变量变换关系是呈现显函数形式；而在柴倍耳变换中，它们是呈现隐函数关系，这样若求高阶摄动时需满足雅可比行列式不为零而且求时也十分麻烦。(2) 在李变换中很容易得到它的逆变换，这样新、旧变量 y、$Y \rightleftharpoons x$、X 互换关系十分简单而又方便。(3) 在李变换中，新、旧哈密顿函数转换关系展开式的系数具有形如(8.180)式的递推关系。在显含时间 t 时，它们的余函数展开式的系数也具有形如(8.214)式的递推关系，因此便于计算机推导。但在柴倍耳变换中，新、旧哈密顿函数转换关系如(8.84)式比较麻烦，因此它既不便于求高阶摄动又不便于推广到显含时间 t 时的情形。

1962 年古在由秀曾利用德洛勒-柴倍耳变换推算了人造卫星在地球引力场中运动的二阶解，过程显得十分繁复，因此他本人再也没有进一步求更高阶的解。1977年木下宙（Kinoshita）以 J_2 为一阶小量，J_3 和 J_4 为二阶小量，在仅考虑这三项时，他采用李变换得到了人造卫星在地球引力场中运动的三阶解，结果得到卫星轨道根数的三阶短周期、长周期和四阶长期变化。

§8 中间轨道和二个不动中心问题

在天体力学中，只有极少量的力学系统是完全可积的．其中二体问题就是属于这样的力学系统．因此人们通常把二体问题的运动轨道——圆锥曲线当作天体运动的一种近似轨道．后来人们又进一步寻找新的力学系统，希望这个力学系统仍然是完全可积的，但是它要比二体问题更加接近天体运动的真实情况．我们称天体在这样力学系统中的轨道为中间轨道．

1760年欧拉在研究月球运动时首先找到了一种中间轨道，这就是著名的二个不动中心问题．在限制性三体问题中，如果二个主星体彼此相距很远可以认为它们相对惯性系是固定不动的，讨论小天体在这二个主星体的引力作用下的运动问题称之为二个不动中心问题或者欧拉问题．欧拉发现二个不动中心问题是完全可积的，因此他利用这样力学系统的运动轨道作为月球运动的中间轨道．

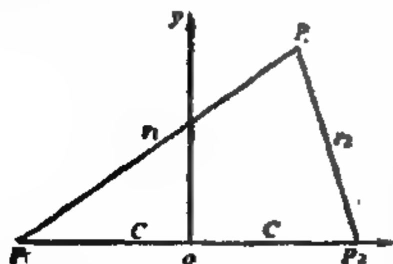


图 8-2

为了方便起见，我们假设初始时刻小天体是在它与二个主星体所构成的平面内运动，这时二个不动中心可以作为平面问题来考虑．

如图 8-2，我们以二个主星体 P_1 和 P_2 的联线为 x 轴，它们的

中点 O 为坐标原点．若 P_1 和 P_2 之间的距离为 $2c$，则它们与小天体 P 之间的距离平方分别为

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 \\ r_2^2 = (x-c)^2 + y^2 \end{aligned}\right\}。 \tag{8.270}$$

在这样的力学系统中，小天体 P 的位函数是：

$$V = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}。 \tag{8.271}$$

其中 $\mu_1 = GM_1$，$\mu_2 = GM_2$，M_1 和 M_2 分别是 P_1 和 P_2 的质量．

我们作梯勒变换，令：

$$x = c\,\mathrm{ch}\,q_1 \cos q_2, \quad y = c\,\mathrm{sh}\,q_1 \sin q_2。 \tag{8.272}$$

其中 ch 和 sh 表示双曲余弦和正弦函数，q_1 和 q_2 作为广义坐标．

将(8.272)式代入(8.270)式后，不难推得：

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 = c^2(\mathrm{ch}\,q_1 + \cos q_2)^2 \\ r_2^2 = c^2(\mathrm{ch}\,q_1 - \cos q_2)^2 \end{aligned}\right\}。 \tag{8.273}$$

利用上式，(8.271)式化为

$$V = \frac{1}{c}\mu_1(\mathrm{ch}\,q_1 + \cos q_2)^{-1} + \frac{1}{c}\mu_2(\mathrm{ch}\,q_1 - \cos q_2)^{-1}。 \tag{8.274}$$

将(8.272)式对 t 求一次微商后有：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} = c(\mathrm{sh}\,q_1 \cos q_2 \dot{q}_1 - \mathrm{ch}\,q_1 \sin q_2 \dot{q}_2) \\ \dot{y} = c(\mathrm{ch}\,q_1 \sin q_2 \dot{q}_1 + \mathrm{sh}\,q_1 \cos q_2 \dot{q}_2) \end{aligned}\right\}。 \tag{8.275}$$

由(8.275)式可得在这样力学系统中，小天体 P 的单位质量的动能是：

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}c^2(\mathrm{ch}^2 q_1 - \cos^2 q_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)。 \tag{8.276}$$

相应的广义动量：

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = c^2(\mathrm{ch}^2 q_1 - \cos^2 q_2)\dot{q}_1 \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = c^2(\mathrm{ch}^2 q_1 - \cos^2 q_2)\dot{q}_2 \end{aligned}\right\}。 \tag{8.277}$$

利用(8.274)、(8.276)和(8.277)式可得它的哈密顿函数是:

$$\begin{aligned} H = T - V = &\frac{1}{2c^2}(\mathrm{ch}^2 q_1 - \cos^2 q_2)^{-1}(p_1^2 + p_2^2) \\ &- \frac{1}{c}\mu_1(\mathrm{ch} q_1 + \cos q_2)^{-1} \\ &- \frac{1}{c}\mu_2(\mathrm{ch} q_1 - \cos q_2)^{-1}。 \end{aligned} \tag{8.278}$$

根据理论力学知识,这时小天体的运动应当满足哈密顿-雅可比方程:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0。\quad (i = 1, 2) \tag{8.279}$$

其中母函数 $S(q_i, \alpha_i, t)$ 满足:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}。 \tag{8.280}$$

和

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}。 \tag{8.281}$$

这里 α_i 和 β_i 称为正则常数.

(8.279)式是一阶偏微分方程,可以采用分离变量法来解. 由于哈密顿函数不显含时间 t,因此方程存在一个积分 $H = \alpha_1$。将 S 中含 q_1 和含 q_2 的部分分离开来,分别用 S_1 和 S_2 来表示,则母函数可以写为

$$S = -\alpha_1 t + S_1(q_1) + S_2(q_2)。 \tag{8.282}$$

将(8.278)、(8.280)和(8.282)式一起代入(8.279)式后可得:

$$\left(\frac{dS_1}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dS_2}{dq_2}\right)^2 - Q_1(q_1) + Q_2(q_2) = 0。 \tag{8.283}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} Q_1(q_1) &= 2c^2\alpha_1 \mathrm{ch}^2 q_1 + 2c\,\mathrm{ch}\, q_1(\mu_1+\mu_2) \\ Q_2(q_2) &= 2c\alpha_1 \cos^2 q_2 + 2c\cos q_2(\mu_1-\mu_2) \end{aligned}\right\}. \tag{8.284}$$

由于 q_1 和 q_2 相互独立，因此(8.283)式右端含 q_1 的部分和含 q_2 的部分都应当是常数，这个正则常数可以记为 α_2。我们令 $\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2 + Q_2(q_2) = \alpha_2$，则有$\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2 - Q_1(q_1) = -\alpha_2$。这时原来的一阶偏微分方程化为二个一阶常微分方程，并且可以直接积分，积分结果为

$$\left.\begin{aligned} S_1(q_1) &= \pm\int\sqrt{Q_1-\alpha_2}\,\mathrm{d}q_1 \\ S_2(q_2) &= \pm\int\sqrt{\alpha_2-Q_2}\,\mathrm{d}q_2 \end{aligned}\right\}. \tag{8.285}$$

将(8.282)和(8.285)式代入(8.280)和(8.281)式并且利用(8.284)式，我们可得：

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}q_1} = \pm\sqrt{Q_1(q_1)-\alpha_2} \\ p_2 &= \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}q_2} = \pm\sqrt{\alpha_2-Q_2(q_2)} \end{aligned}\right\}. \tag{8.286}$$

和

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= -t + \frac{\partial S_1}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial S_2}{\partial\alpha_1} = -t + \int\frac{c^2\mathrm{ch}^2 q_1}{p_1}\,\mathrm{d}q_1 - \int\frac{c^2\cos^2 q_2}{p_2}\mathrm{d}q_2 \\ \beta_2 &= \frac{\partial S_1}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial\alpha_2} = -\int\frac{1}{2p_1}\,\mathrm{d}q_1 + \int\frac{1}{2p_2}\,\mathrm{d}q_2 \end{aligned}\right\}. \tag{8.287}$$

在(8.287)式中出现这样四个积分：$\int\frac{1}{p_1}\mathrm{d}q_1$、$\int\frac{\mathrm{ch}^2 q_1}{p_1}\mathrm{d}q_1$ 和 $\int\frac{1}{p_2}\mathrm{d}q_2$、$\int\frac{\cos^2 q_2}{p_2}\mathrm{d}q_2$。我们令 $x_1 = \mathrm{ch}\,q_1$，则 $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{sh}\,q_1\mathrm{d}q_1$ 或者 $\mathrm{d}q_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2-1}}\mathrm{d}x_1$，于是有：

$$\int\frac{1}{p_1}\,\mathrm{d}q_1 = \pm\int\frac{\mathrm{d}x_1}{\sqrt{F(x_1)}},\quad \int\frac{\mathrm{ch}^2 q_1}{p_1}\,\mathrm{d}q_1 = \pm\int\frac{x_1^2\mathrm{d}x_1}{\sqrt{F(x_1)}} \tag{8.288}$$

式中 $F(x_1)=(x_1^2-1)[2c^2\alpha_1 x_1^2+2c(\mu_1+\mu_2)x_1-\alpha_2]$。

同样令 $x_2=\cos q_2$，则 $dx_2=-\sin q_2 dq_2$ 或者 $dq_2=-\frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}}dx_2$，于是有:

$$\int\frac{1}{p_2}dq_2=\mp\int\frac{dx_2}{\sqrt{G(x_2)}},\quad\int\frac{\cos^2 q_2}{p_2}dq_2=\mp\int\frac{x_2^2 dx_2}{\sqrt{G(x_2)}}\tag{8.289}$$

式中 $G(x_2)=(x_2^2-1)[2c^2\alpha_1 x_2^2+2c(\mu_1-\mu_2)x_2-\alpha_2]$。

由于$F(x_1)$和$G(x_2)$都是x_1和x_2的四次多项式，因此(8.288)和(8.289)式都是属于椭圆积分。

从(8.287)式，我们可以求出小天体的广义坐标是:

$$\left.\begin{aligned}q_1=q_1(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,t)\\ q_2=q_2(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,t)\end{aligned}\right\}。\tag{8.290}$$

另外，由(8.277)式有

$$\dot{q}_i=\frac{1}{c^2}(\mathrm{ch}^2 q_1-\cos^2 q_2)^{-1}p_i。\tag{8.291}$$

将(8.284)、(8.286)和(8.290)式代人(8.291)式后，我们可以得到小天体的广义速度是:

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_1=\dot{q}_1(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,t)\\ \dot{q}_2=\dot{q}_2(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,t)\end{aligned}\right\}。\tag{8.292}$$

上面所得到的(8.290)和(8.292)式就是二个不动中心问题的解，解中包含有椭圆积分。从本节讨论可以看出二个不动中心问题确实是一个完全可积的力学系统，因而能够把它当作为一种中间轨道。

§9 斯特恩型中间轨道

中间轨道理论不仅用来研究自然天体的运动而且用来研究人造天体的运动。在人造卫星运动中，人们也提出了一系列的中间轨道。由前章讨论可以看到，对于目前已发射的绝大部分卫星，主

要摄动作用是来自于地球引力场位函数展式中的带谐项，特别是含 J_2、J_3 和 J_4 的项。因此这时的中间轨道至少要包含 J_2 项的主要影响，如有可能应当包含更多项的影响。

1957年斯特恩首先提出了一种中间轨道。后来加尔芬科(Garfikel)，阿克斯内斯（Aksnes）等人也陆续提出了类似的中间轨道。他们采用的是球面坐标，所取的中间轨道的解中都包含了 J_2 项所引起的一阶长期项，结果中都有椭圆积分，我们可以把它们统称为斯特恩型中间轨道。

在人造卫星运动中，所选取的中间轨道应当满足下列三个条件：

（1）如果用球面坐标（r,φ,λ）作为广义坐标，则位函数的形式应当是 $V_0=f(r)+\frac{g(\varphi)}{r^2}$，这样卫星运动的哈密顿-雅可比方程才能分离变量，使方程变成为完全可积的。

（2）中间轨道的解至少要包含 J_2 项所引起的一阶长期项。

（3）中间轨道的轨道根数计算要尽可能地简单些，同时还要便于考虑进一步的摄动计算。

利用第一章知识，可得以球面坐标为广义坐标时卫星单位质量的动能是：

$$T=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2). \tag{8.293}$$

由(8.293)式可得这时的广义动量是：

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=\dot{r},\quad p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=r^2\dot{\varphi},\quad p_3=\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}}=r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}. \tag{8.294}$$

将它们代入(8.293)式后可得用广义动量来表示的卫星单位质量的动能是：

$$T=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{1}{r^2}p_2^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_3^2\right). \tag{8.295}$$

如果位函数的形式是：

$$V_0 = f(r) + \frac{g(\varphi)}{r^2},\tag{8.296}$$

则可得系统的哈密顿函数为

$$H = T - V_0 = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{1}{r^2}p_2^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_3^2\right) - f(r) - \frac{g(\varphi)}{r^2}.\tag{8.297}$$

由(8.297)式可以看出哈密顿H不显含时间t和广义坐标λ，因此方程存在二个积分 $H = \alpha_1$ 和 $p_3 = \alpha_3$。这时母函数可以写为

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3\lambda + S_1(r) + S_2(\varphi)。\tag{8.298}$$

将(8.280)、(8.297)和(8.298)式一起代入哈密顿-雅可比方程(8.279)式后可得：

$$r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dS_2}{d\varphi}\right)^2 - R(r) + \Phi(\varphi) = 0\tag{8.299}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}R(r) &= 2\alpha_1 r^2 + 2r^2 f(r)\\ \Phi(\varphi) &= \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi} - 2g(\varphi)\end{aligned}\right\}。\tag{8.300}$$

上式中含r的部分和含φ的部分已经分离，由于r和φ互相独立，因此这二部分都只能为常数。在地球引力场中，$g(\varphi) \sim J_2$是一阶小量，故 $\Phi(\varphi) > 0$，这样含φ的部分 $\left(\frac{dS_2}{d\varphi}\right)^2 + \Phi(\varphi)$应当大于零，我们可以令为 α_2^2。这时 $r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - R(r) = -\alpha_2^2$。(8.299)式化为二个一阶常微分方程并且可以直接积分，积分结果是

$$\left.\begin{aligned}S_1(r) &= \pm\int\frac{1}{r}\sqrt{R(r) - \alpha_2^2}\,dr\\ S_2(\varphi) &= \pm\int\sqrt{\alpha_2^2 - \Phi(\varphi)}\,d\varphi\end{aligned}\right\}。\tag{8.301}$$

从(8.300)和(8.301)式同样可得：

$$
\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}r} = \pm\frac{1}{r}\sqrt{R(r)-\alpha_2^2} \\
p_2 &= \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\varphi} = \pm\sqrt{\alpha_2^2-\Phi(\varphi)} \\
p_3 &= \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \alpha_3
\end{aligned}\right\}. \qquad (8.302)
$$

和

$$
\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= -t + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = -t + \int\frac{\mathrm{d}r}{p_1} \\
\beta_2 &= \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2} = -\int\frac{\alpha_2}{r^2 p_1}\mathrm{d}r + \int\frac{\alpha_2}{p_2}\mathrm{d}\varphi \\
\beta_3 &= \lambda + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3} = \lambda - \int\frac{\alpha_3}{p_2\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}\right\}. \qquad (8.303)
$$

利用(8.294)、(8.302)和(8.303)式不难得到卫星在球面坐标中的位置和速度：

$$
\left.\begin{aligned}
r &= r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,t) \\
\varphi &= \varphi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,t) \\
\lambda &= \lambda(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,t) \\
\dot{r} &= \dot{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,t) \\
\dot{\varphi} &= \dot{\varphi}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,t) \\
\dot{\lambda} &= \dot{\lambda}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,t)
\end{aligned}\right\}. \qquad (8.304)
$$

1964年加尔芬科给出了以球面坐标为广义坐标时位函数的最一般形式是：

$$
V_0 = \frac{1}{r} - 3J_2\left[\frac{C_1}{2r^2}(\sin^2\varphi - C_2) + \frac{C_3}{r} + \frac{C_4}{r^3}\right]. \qquad (8.305)
$$

式中 C_1、C_2、C_3 和 C_4 是特定常数。

显然(8.305)式是满足第一个条件即位函数形式是 $f(r)+\frac{g(\varphi)}{r^2}$ 的，因此它是完全可积的。这时可取：

$$
\left.\begin{aligned}
f(r) &= \frac{1}{r} - \frac{3J_2C_3}{r} - \frac{3J_2C_4}{r^3} \\
g(\varphi) &= -\frac{3}{2}J_2C_1(\sin^2\varphi - C_2)
\end{aligned}\right\}。 \tag{8.306}
$$

在地球引力场位函数展式中，若只取主要带谐项 J_2 时，有

$$
V = \frac{1}{r} - \frac{J_2}{r^3}P_2(\sin\varphi) = \frac{1}{r} - \frac{J_2}{2r^3}(3\sin^2\varphi - 1) \tag{8.307}
$$

这时地球引力场位函数与形式为 (8.305) 式的中间轨道位函数之差可视为摄动，摄动函数是

$$
R = V - V_0 = J_2\Big[\frac{3C_1}{2r^3}(\sin^2\varphi - C_2) - \frac{1}{2r^3}(3\sin^2\varphi - 1)
$$

$$
+ \frac{3C_3}{r} + \frac{3C_4}{r^3}\Big]。 \tag{8.308}
$$

在(8.308)式中，有常数项和短周期项，它们对中间轨道的轨道根数会产生长期变化和短周期变化。为了使中间轨道能够满足第二个条件即它应当包含有 J_2 项所引起的一阶长期变化，故首先将 R 对 M 求平均值以消除短周期项的影响。

由于 $\sin\varphi = \sin i\sin(\omega + f)$，$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\sin^2 i[1 - \cos(\omega + f)]$，利用(7.68)、(7.69)式和表 7-1，我们可得：

$$
\left.\begin{aligned}
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3(\sin^2\varphi - C_2)} = (1 - e^2)^{-3/2}\left(\frac{1}{2}\sin^2 i - C_2\right) \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3(3\sin^2\varphi - 1)} = (1 - e^2)^{-3/2}\left(\frac{3}{2}\sin^2 i - 1\right) \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = (1 - e^2)^{-3/2}
\end{aligned}\right\}。 \tag{8.309}
$$

另外，还有

$$
\overline{\left(\frac{a}{r}\right)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a}{r}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}E = 1 \tag{8.310}
$$

将(8.309)和(8.310)式代入(8.308)式后可得：

$$
\bar{R} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\mathrm{d}M = \frac{3J_2}{4a^2}(1-e^2)^{-1/2}\Big\{2\Big[\frac{1}{3p} - C_1C_2 + 2C_3p(1-e^2)^{-1/2} + \frac{2}{p}C_4\Big] - \Big(\frac{1}{p} - C_1\Big)\sin^2 i\Big\}. \tag{8.311}
$$

式中 $p = a(1-e^2)$.

要求中间轨道位函数 V_0 包含有 J_2 的一阶长期项，则必须有 $\bar{R} = 0$. 由于卫星的轨道倾角 i 可以任意的，因此可以从(8.311)式确定这些待定系数应当满足：

$$
C_1 = \frac{1}{p},\ C_2 = \frac{1}{3} + 2C_3p^2(1-e^2)^{-1/2} + 2C_4. \tag{8.312}
$$

斯特恩、加尔芬科和阿克斯内斯三种中间轨道位函数形式都可以化为(8.305)式，各人相应所采用的系数如表 8-1

表 8-1　中间轨道系数表

中间轨道	C_1	C_2	C_3	C_4
斯特恩	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{2}\sin^2 i$	0	$-\frac{1}{12}(3\cos^2 i-1)$
加尔芬科	$\frac{1}{p}$	$\cos^2 i$	$\frac{(1-e^2)^{1/2}}{6p^2}(3\cos^2 i-1)$	0
阿克斯内斯	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{3}$	0	0

由表 8-1 可以看出他们所采用的中间轨道的系数都是满足(8.312)式的，因此这些中间轨道既可以完全积分又包含了 J_2 的一阶长期项.

将(8.306)式代入(8.300)式后，可得在他们所采用的中间轨道中：

$$
\left.\begin{aligned}
R(r) &= 2\alpha_1 r^2 + 2(1-3J_2C_3)r - \frac{6J_2C_4}{r} \\
\Phi(\varphi) &= \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi} + 3J_2C_1(\sin^2\varphi - C_2)
\end{aligned}\right\}. \tag{8.313}
$$

将(8.313)式代入(8.302)和(8.303)式后可得对于斯特恩型中

间轨道卫星的位置和速度。在(8.303)式中有四个积分：$\int\frac{1}{p_1}dr$，$\int\frac{\alpha_1}{p_1r^2}dr$ 和 $\int\frac{\alpha_2}{p_2}d\varphi$，$\int\frac{\alpha_3}{p_2\cos^2\varphi}d\varphi$。前二个积分类似二体问题可以通过变量变换 $r=a(1-e\cos E)$ 和 $r=\frac{p}{1+e\cos f}$ 直接进行积分。对于后二个积分，我们令 $\tau=\sin\varphi$，可以化为

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{\alpha_2}{p_2}d\varphi&=\pm\int\frac{d\tau}{\sqrt{F(\tau)}}\\ \int\frac{\alpha_3}{p_2\cos^2\varphi}d\varphi&=\pm\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\int\frac{d\tau}{(1-\tau^2)\sqrt{F(\tau)}}\end{aligned}\right\}。\tag{8.314}$$

式中 $F(\tau)=1-\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2+\frac{3J_2}{\alpha_2^2}C_1C_2-\left[1+\frac{3J_2}{\alpha_2^2}C_1(1+C_2)\right]\tau^2$
$+\frac{3J_2C_1}{\alpha_2^2}\tau^4$。

(8.314)式是椭圆积分，因此斯特恩型中间轨道的解中也包含有椭圆积分。

与二体问题相类似，中间轨道也可以引入相应的轨道根数 a、e、i、Ω、ω 和 M_0 来代替(8.304)式中的正则常数 α_k、β_k($k=1,2,3$)。我们可以根据初始时刻 t_0 时的卫星的位置 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 或者相应的初始条件通过轨道计算确定中间轨道的轨道根数 $\sigma_i(t_0)$ ($i=1,2,\cdots6$)，然后类似第五章所得到的摄动运动方程，将中间轨道的摄动函数 R 即(8.308)式代入进行摄动计算，结果可得所需时刻 t 时的中间轨道的轨道根数 $\sigma_i(t)$($i=1,2,\cdots6$)，算出这时卫星的位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$。

§10 文梯型和阿克谢诺夫型中间轨道

1959 年文梯首先将二个不动中心问题应用到人造卫星运动中，得到一种中间轨道，称为文梯型中间轨道。这种中间轨道的解

中包含有地球引力场位函数展式中的 J_2 项和大部分 J_4 项，因此它比斯特恩型中间轨道更加接近卫星的真实运动轨道. 1963年阿克谢诺夫也利用二个不动中心问题提出一种中间轨道，称为阿克谢诺夫型中间轨道. 这种中间轨道的解中包含有 J_2、J_3 和大部分 J_4 项，是目前最接近卫星真实运动轨道的一种中间轨道. 文梯型和阿克谢诺夫型中间轨道都是以旋转椭球坐标作为广义坐标，结果中都含有椭圆积分. 它们的解比斯特恩型中间轨道的解更加精确但也更加复杂，自然进行轨道计算和进一步考虑摄动计算也要更加困难些. 1968 年阿克谢诺夫进一步考虑了摄动，把解准到 J_2^2 项得到卫星在地球引力场中运动的二阶理论. 1971 年纳索诺瓦(Насонова)又更进一步把解准到 J_2^3 项得到卫星在地球引力场中运动的三阶理论. 下面就介绍这二种类型的中间轨道.

1. 文梯型中间轨道

作空间梯勒交换:

$$\left.\begin{aligned} x &= c\,\mathrm{ch}\xi\sin\theta\cos\lambda \\ y &= c\,\mathrm{ch}\xi\sin\theta\sin\lambda \\ z &= c\,\mathrm{sh}\xi\cos\theta \end{aligned}\right\}. \tag{8.315}$$

式中 c 是实常数.

我们令

$$\rho = c\,\mathrm{sh}\xi, \quad \eta = \cos\theta. \tag{8.316}$$

于是(8.315)式化为

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\cos\lambda \\ y &= \sqrt{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\sin\lambda \\ z &= \rho\eta \end{aligned}\right\}. \tag{8.317}$$

广义坐标 (ρ,η,λ) 是一种旋转椭球坐标. 因为从 (8.317)式可以看出

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 + c^2} + \frac{z^2}{\rho^2} = 1, \quad \frac{x^2 + y^2}{c^2(1 - \eta^2)} - \frac{z^2}{c^2\eta^2} = 1.$$

当 $\rho =$ 恒量时，前者表示以 z 轴为旋转对称的旋转椭球面；当

$\eta=$ 恒量时，后者表示以 z 轴为旋转对称的单叶双曲面；另外，$\lambda=$ 恒量时，是一个半平面。显然它们的变化范围是：$c\leqslant\rho<\infty$，$-1\leqslant\eta\leqslant1$，$0\leqslant\lambda\leqslant2\pi$。

由(8.317)式，不难得到

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial\rho}=\frac{1-\eta^2}{D}\rho\cos\lambda,\quad \frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{1-\eta^2}{D}\rho\sin\lambda,\quad \frac{\partial z}{\partial\rho}=\eta\\
&\frac{\partial x}{\partial\eta}=-\frac{\rho^2+c^2}{D}\eta\cos\lambda,\quad \frac{\partial y}{\partial\eta}=-\frac{\rho^2+c^2}{D}\eta\sin\lambda\quad \frac{\partial z}{\partial\eta}=\rho\\
&\frac{\partial x}{\partial\lambda}=-D\sin\lambda,\quad \frac{\partial y}{\partial\lambda}=D\cos\lambda,\quad \frac{\partial z}{\partial\lambda}=0
\end{aligned}\right\}, \tag{8.318}$$

式中 $D=\sqrt{(\rho^2+c^2)(1-\eta^2)}$。

由于旋转椭球坐标(ρ,η,λ)是一个正交坐标系，故从(1.10)式可得空间的度规张量是：

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} g_{11}, & 0, & 0\\ 0, & g_{22}, & 0\\ 0, & 0, & g_{33}\end{pmatrix}. \tag{8.319}$$

利用(8.318)式，可得式中

$$\left.\begin{aligned}
g_{11}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2=\frac{\rho^2+c^2\eta^2}{\rho^2+c^2}\\
g_{22}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2=\frac{\rho^2+c^2\eta^2}{1-\eta^2}\\
g_{33}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2\\
&=(\rho^2+c^2)(1-\eta^2)
\end{aligned}\right\}. \tag{8.320}$$

由(1.9)式可得在旋转椭球坐标系中，卫星的速度平方 $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=g_{11}\dot{\rho}^2+g_{22}\dot{\eta}^2+g_{33}\dot{\lambda}^2$。利用(8.320)式就可以算出这时卫星的单位质量的动能是：

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2+c^2\eta^2}{\rho^2+c^2}\dot{\rho}^2\right.$$

$$+\frac{\rho^2+c^2\eta^2}{1-\eta^2}\dot{\eta}^2+(\rho^2+c^2)(1-\eta^2)\dot{\lambda}^2\Big]. \qquad (8.321)$$

文梯型中间轨道实际上是一种二个不动中心问题。这二个主星体的质量相等，在理论单位制中，有

$$\mu_1=\mu_2=\frac{1}{2}$$

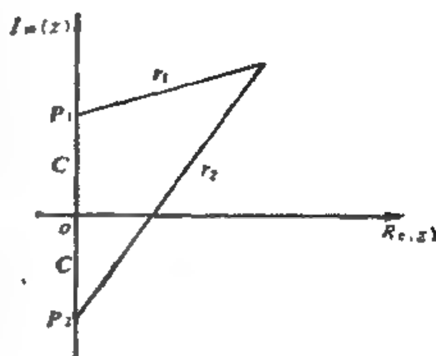


图 8-3

由于地球引力场位函数基本上是以 z 轴为旋转对称的，因此可以假定这二个主星体都在 z 轴上，并且互为共轭。$z_1=ic$ 和 $z_2=-ic$，如图 8-3 所示，图中 Re(z) 和 Im(z) 分别表示复平面上的实轴与虚轴。与一般二个不动中心问题不同的是它们都分布在虚轴上。

在这样的二个不动中心问题中，卫星的位函数

$$V_0=\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \qquad (8.322)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} r_1&=\sqrt{x^2+y^2+(z-ic)^2}\\ r_2&=\sqrt{x^2+y^2+(z+ic)^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (8.323)$$

将(8.317)式代入(8.323)式后可得：

$$\left.\begin{aligned} r_1^2&=(\rho^2+c^2)(1-\eta^2)+(\rho\eta-ic)^2=A-iB\\ r_2^2&=(\rho^2+c^2)(1-\eta^2)+(\rho\eta+ic)^2=A+iB\end{aligned}\right\}. \qquad (8.324)$$

其中

$$A=\rho^2-c^2\eta^2,\quad B=2c\rho\eta. \qquad (8.325)$$

由(8.324)式很容易得到：

$$\left.\begin{aligned} r_1r_2&=\sqrt{A^2+B^2}=\rho^2+c^2\eta^2\\ r_1+r_2&=\sqrt{2A+2r_1r_2}=2\rho\end{aligned}\right\} \qquad (8.326)$$

将(8.326)式代入(8.322)式后可得在旋转椭球坐标系中，卫

星的位函数是

$$V_0 = \frac{\rho}{\rho^2 + c^2\eta^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho + ic\eta}\right). \qquad (8.327)$$

由于 $(\rho + ic\eta)^2 = \rho^2 - c^2\eta^2 + 2ic\rho\eta = r^2 - c^2 + 2icr\mu$，其中 $\mu = \sin\varphi = \frac{z}{r}$，因此 $\frac{1}{\rho + ic\eta} = \frac{1}{r}(1 - 2\mu t + t^2)^{-1/2}$，这里 $t = -i\frac{c}{r}$。将它们代入(1.40)和(1.44)式可得：

$$\frac{1}{\rho + ic\eta} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\sin\varphi)t^n. \qquad (8.328)$$

利用(8.328)式，(8.327)式化为

$$V_0 = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 - \frac{c^2}{r^2}P_2(\sin\varphi) + \frac{c^4}{r^4}P_4(\sin\varphi) - \cdots\right]. \qquad (8.329)$$

将 (8.329) 和 (1.51) 式相比较，如果令 $c^2 = J_2$，则形式为 (8.327) 式的位函数就包含了地球引力场位函数展式中的 J_2 项。由表 1-1，取 $J_2 = 1082.64 \times 10^{-6}$，则 $c = 32.9035 \times 10^{-3} = 209.864$ 公里，$c^4 = 1.172 \times 10^{-6}$，而 $J_4 = -1.618 \times 10^{-6}$，因此文梯型的中间轨道的解包含有 J_2 项和大部分的 J_4 项，自然比斯特恩型中间轨道更加接近卫星的真实运动轨道.

由(8.321) 和 (8.327)式可得在文梯型中间轨道中哈密顿函数是：

$$H = T - V_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2 + c^2}{\rho^2 + c^2\eta^2}p_1^2 + \frac{1 - \eta^2}{\rho^2 + c^2\eta^2}p_2^2 + \frac{1}{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)}p_3^2\right] - \frac{\rho}{\rho^2 + c^2\eta^2} \qquad (8.330)$$

其中 $p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot\rho} = \frac{\rho^2 + c^2\eta^2}{\rho^2 + c^2}\dot\rho$，$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot\eta} = \frac{\rho^2 + c^2\eta^2}{1 - \eta^2}\dot\eta$，

$$p_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = (\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)\dot{\lambda}.$$

由(8.330)式显然可见哈密顿函数H不显含t和λ，故方程存在二个积分 $H = \alpha_1$ 和 $p_\lambda = \alpha_3$。这时母函数可以写为

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + S_1(\rho) + S_2(\eta). \qquad (8.331)$$

利用恒等式 $\dfrac{\rho^2 + c^2\eta^2}{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)} = \dfrac{1}{1 - \eta^2} - \dfrac{c^2}{\rho^2 + c^2}$,

将(8.280)、(8.330)和(8.331)式一起代入哈密顿-雅可比方程(8.279)式后可得:

$$(\rho^2 + c^2)\left(\frac{dS_1}{d\rho}\right)^2 + (1 - \eta^2)\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2 - M(\rho) + N(\eta) = 0. \qquad (8.332)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} M(\rho) &= 2\rho + 2\alpha_1\rho^2 + \frac{c^2\alpha_3^2}{\rho^2 + c^2} \\ N(\eta) &= -2\alpha_1 c^2\eta^2 + \frac{\alpha_3^2}{1 - \eta^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (8.333)$$

由于 $c = \sqrt{J_2}$，是一个小量，因此 $N(\eta) > 0$，$(1 - \eta^2) \times \left(\dfrac{dS_2}{d\eta}\right)^2 + N(\eta) > 0$，可令为$\alpha_2^2$。同样(8.332)式经分离变量后化为二个一阶常微分方程可以直接积分，积分结果是:

$$\left.\begin{aligned} S_1(\rho) &= \pm\int \frac{\sqrt{F(\rho)}}{\rho^2 + c^2} d\rho \\ S_2(\eta) &= \pm\int \frac{\sqrt{G(\eta)}}{1 - \eta^2} d\eta \end{aligned}\right\} \qquad (8.334)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} F(\rho) &= (\rho^2 + c^2)(M - \alpha_2^2) \\ &= (\rho^2 + c^2)(2\rho + 2\alpha_1\rho^2 - \alpha_2^2) + c^2\alpha_3^2 \\ G(\eta) &= (1 - \eta^2)(\alpha_2^2 - N) \\ &= (1 - \eta^2)(\alpha_2^2 + 2\alpha_1 c^2\eta^2) - \alpha_3^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (8.335)$$

由(8.333)和(8.334)式同样有:

$$
\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial S}{\partial \rho} = \frac{\partial S_1}{\partial \rho} = \pm\frac{\sqrt{F(\rho)}}{\rho^2 + c^2} \\
p_2 &= \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\eta} = \pm\frac{\sqrt{G(\eta)}}{1 - \eta^2} \\
p_3 &= \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \alpha_3
\end{aligned}\right\}. \tag{8.336}
$$

和

$$
\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= -t + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_1} = -t \pm \int \frac{\rho^2}{\sqrt{F(\rho)}}\mathrm{d}\rho \pm \int \frac{c^2\eta^2}{\sqrt{G(\eta)}}\mathrm{d}\eta \\
\beta_2 &= \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2} = \mp\int \frac{\alpha_2}{\sqrt{F(\rho)}}\mathrm{d}\rho \pm \int \frac{\alpha_2}{\sqrt{G(\eta)}}\mathrm{d}\eta \\
\beta_3 &= \lambda + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3} = \lambda \pm \int \frac{c^2\alpha_3}{(\rho^2 + c^2)\sqrt{F(\rho)}}\mathrm{d}\rho \\
&\quad \mp \int \frac{\alpha_3}{(1-\eta^2)\sqrt{G(\eta)}}\mathrm{d}\eta
\end{aligned}\right\}. \tag{8.337}
$$

由于 $F(\rho)$ 和 $G(\eta)$ 分别是 ρ 和 η 的四次多项式，因此(8.337)式中的六个积分都是椭圆积分。 与前面一样，利用 (8.336) 和(8.337)式可以得到文梯型中间轨道的解。

为了便于积分，我们也可以将解表示成参数形式．由(8.330)和(8.336)式可得：

$$
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{\sqrt{F(\rho)}}{\rho^2 + c^2\eta^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{\sqrt{G(\eta)}}{\rho^2 + c^2\eta^2},
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha_3}{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)}. \tag{8.338}
$$

引入新的自变量 τ，有 $\mathrm{d}t = (\rho^2 + c^2\eta^2)\mathrm{d}\tau$，积分结果是

$$
t(\tau) = \int (\rho^2 + c^2\eta^2)\mathrm{d}\tau \tag{8.339}
$$

(8.338)式积分后有

$$
\pm\int \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \tau + C_1, \quad \pm\int \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{G(\eta)}} = \tau + C_2,
$$

$$\lambda = \int \frac{\alpha_3(\rho^2 + c^2\eta^2)}{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)} d\tau + C_3 \tag{8.340}$$

式中 C_1、C_2 和 C_3 是积分常数，它们代替 β_1、β_2 和 β_3。

(8.340)的前二式积分结果是

$$\rho = \rho(\tau),\ \eta = \eta(\tau)。 \tag{8.341}$$

将(8.341)式代入(8.339)和(8.340)的第三式后，积分结果是

$$\lambda = \lambda(\tau),\quad t = t(\tau)。 \tag{8.342}$$

将(8.341)式代入(8.338)式后可得：

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}(\tau),\ \dot{\eta} = \dot{\eta}(\tau),\ \dot{\lambda} = \dot{\lambda}(\tau) \tag{8.343}$$

(8.341)、(8,342)和(8.343)式就是文様型中间轨道解的参数形式，解中仍含有椭圆积分。

2. 阿克谢诺夫型中间轨道

仍然采用旋转椭球坐标系 (ρ,η,λ)，只是将坐标原点沿 z 轴移到 $c\sigma$ 处。这时，它与直角坐标系的关系是：

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\cos\lambda \\ y &= \sqrt{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\sin\lambda \\ z &= \rho\eta + c\sigma \end{aligned}\right\}。 \tag{8.344}$$

式中 c 和 σ 为实常数。

利用(8.318)、(8.319)和(8.320)式可得在这种坐标系中卫星单位质量的动能 T 仍然是形式(8.321)式。

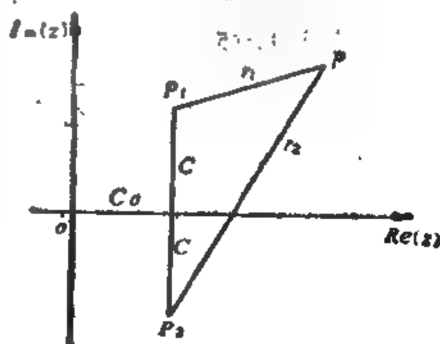


图 8-4

阿克谢诺夫型中间轨道也是一种二个不动中心问题。它的二个主星体的质量分别是

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sigma)$$

和

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sigma),$$

二个主星体都分布在 z 轴上，互为共轭．在复平面上，它们的位置分别是 $z_1 = c(\sigma + i)$ 和 $z_2 = c(\sigma - i)$，如图 8-4 所示．它相当于将文梯型中间轨道的二个主星体的位置沿着 z 的实轴平移了 $c\sigma$。

在阿克谢诺夫型中间轨道中，卫星的位函数为

$$V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + i\sigma}{r_1} + \frac{1 - i\sigma}{r_2}\right). \tag{8.345}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2} \\ r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2} \end{aligned}\right\}. \tag{8.346}$$

令 $t_1 = \frac{c}{r}(\sigma + i)$，$t_2 = \frac{c}{r}(\sigma - i)$则由(8.346)式可得：

$$\left.\begin{aligned} r_1 = r(1 - 2t_1 \sin\varphi + t_1^2)^{1/2} \\ r_2 = r(1 - 2t_2 \sin\varphi + t_2^2)^{1/2} \end{aligned}\right\}. \tag{8.347}$$

式中 $\sin\varphi = \frac{z}{r}$。

利用(1.40)和(1.44)式，从(8.347)式有

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\sin\varphi) t_1^n, \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\sin\varphi) t_2^n,$$

将它们代入(8.345)式后，可得：

$$V_0 = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{r^n} P_n(\sin\varphi). \tag{8.348}$$

其中系数

$$K_n = \frac{1}{2}c^n[(1 + i\sigma)(\sigma + i)^n + (1 - i\sigma)(\sigma - i)^n]. \tag{8.349}$$

显然 $K_0 = 1$，$K_1 = 0$，于是(8.348)式又可化为

$$V_0 = \frac{1}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{K_n}{r^n} P_n(\sin\varphi)\right]. \tag{8.350}$$

由(8.349)式不难得出：

$$K_n=\frac{1}{2}c^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sigma^{n-k}[i^k(1+i\sigma)+(-i)^k(1-i\sigma)],$$

可以将求和号中的项分为二类：当 k 为偶数时可令 $k=2h$，相应的项为 $2\sum_{h=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^hC_n^{2h}\sigma^{n-2h}$；当 k 为奇数时可令 $k=2h+1$，相应的项为 $-2\sum_{h=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^hC_n^{2h+1}\sigma^{n-2h}$. $\left[\frac{n}{2}\right]$表示取$\frac{n}{2}$的整数部分，$\left[\frac{n-1}{2}\right]$亦然．相加结果为

$$K_n=c^n\left[\sum_{h=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^hC_n^{2h}\sigma^{n-2h}-\sum_{h=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^hC_n^{2h+1}\sigma^{n-2h}\right].\tag{8.351}$$

由于 c 和 σ 为实常数，因此 K_n 也是实常数．由(8.351)式可得 K_n 的前几个是：

$$\left.\begin{aligned}K_2&=c^2(C_2^0\sigma^2-C_2^2-C_2^1\sigma^2)=-C^2(1+\sigma^2)\\K_3&=c^3(C_3^0\sigma^3-C_3^2\sigma-C_3^1\sigma^2+C_3^3\sigma)=-2C^3\sigma\\&\quad\times(1+\sigma^2)\\K_4&=C^4(C_4^0\sigma^4-C_4^2\sigma^2+C_4^4-C_4^1\sigma^4+C_4^3\sigma^2)\\&=C^4(1-2\sigma^2-3\sigma^4)=C^4(1+\sigma^2)(1-3\sigma^2)\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right\}.\tag{8.352}$$

比较(1.51)与(8.350)式，如果取：

$$K_2=-J_2,\qquad K_3=-J_3,\tag{8.353}$$

则形式为(8.350)式的位函数就包含了地球引力场位函数展式中的 J_2 和 J_3 项．

利用(8.352)的前二式和(8.353)式可以解出待定系数：

$$c=\left[J_2-\left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2\right]^{1/2},\ \sigma=\frac{J_3}{2cJ_2}.\tag{8.354}$$

从表 1-1 有 $J_2=1082.64\times10^{-6}$，$J_3=-2.541\times10^{-6}$，则

可解出 $c = 32.8826 \times 10^{-3} = 209.730$ 公里，$\sigma = -35.6881 \times 10^{-3}$。将它们代入 (8.352) 的第三式可得 $K_4 = 1.166 \times 10^{-6}$。另外，由 (8.351) 式可以估计出 $K_5 \sim c^5\sigma \sim c^6 \sim 10^{-9}$，$K_6 \sim c^6 \sim 10^{-9}$，……至少相当 J_2 为三阶小量。但是，$J_4 = -1.618 \times 10^{-6}$。因此阿克谢诺夫型中间轨道的解中包含了 J_2、J_3 和大部分的 J_4 项，它比斯特恩型中间轨道和文梯型中间轨道更加接近卫星的真实运动轨道。

将(8.344) 式代入(8.346) 式后可得 r_1 和 r_2 与文梯型中间轨道中的 r_1 和 r_2 一样，仍是(8.324)和(8.325)式。实际上由图 8-3 和 8-4 可以看出，卫星与主星体都平移了 $c\sigma$ 但相对位置并没有变化。由 (8.326) 式可得 $r_2 - r_1 = \sqrt{2A - 2r_1r_2} = 2ic\eta$。将它们一起代入(8.345)式后可以得到用旋转椭球坐标(ρ, η, λ)表示的卫星的位函数是：

$$V_0 = \frac{1}{2r_1r_2}[r_1 + r_2 + i\sigma(r_2 - r_1)] = \frac{\rho - c\sigma\eta}{\rho^2 + c^2\eta^2}. \qquad (8.355)$$

比较(8.327)和(8.355)式，显然可见阿克谢诺夫型中间轨道比文梯型中间轨道位函数 V_0 多了一项 $-\frac{c\sigma\eta}{\rho^2 + c^2\eta^2}$，因而哈密顿函数 H 也多了一项$\frac{c\sigma\eta}{\rho^2 + c^2\eta^2}$。由于它也不显含 t 和 λ，故母函数形式仍为(8.331)式。将它代入哈密顿-雅可比方程后，形式上仍可写为(8.332)式，其中 $M(\rho)$ 不变，$N(\eta)$ 增加了一项 $2c\sigma\eta$。由于 c 是小量，$N(\eta) > 0$，仍可令这时的 $(1 - \eta^2)\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2 + N(\eta) = \alpha_2^2$。同样可以分离变量积出 $S_1(\rho)$ 和 $S_2(\eta)$，形式仍为(8.334)式。其中 $F(\rho)$ 不变，$G(\eta) = (1 - \eta^2)(\alpha_2^2 + 2\alpha_1c^2\eta^2 - 2c\sigma\eta) - \alpha_3^2$。因此阿克谢诺夫型中间轨道的解形式上与文梯型中间轨道的解一样，$G(\eta)$ 仍是 η 的四次多项式，积分结果仍可用椭圆积分来表示，只是形式上更为复杂些。

利用(8.338)、(8.339)和(8.340) 式也可以将阿克谢诺夫型中

间轨道的解表示成参数形式，结果类似(8.341)、(8.342)和(8.343)式。

在讨论人造卫星在地球引力场中运动时，还有些人也提出了一些中间轨道。例如基斯利克(Кислик)在1960年曾提出了一种中间轨道，其本质与文梯提出的中间轨道一样。另外巴拉(Barra)在1961年也提了一种中间轨道。他采用的位函数是：

$$V_0=\frac{1}{\rho}\left[1-\frac{\delta}{\rho^2}(z-\delta)\right],\ 其中\ \rho=\sqrt{x^2+y^2+(z-\delta)^2},$$

δ是待定的小参数。若取 $\delta=\sqrt{J_2}$，这种中间轨道的解中也包含了J_2项。但是，这种中间轨道只是文梯中间轨道的近似。当准到J_2时文梯中间轨道就变为巴拉中间轨道。因此它们都可以算是文梯型中间轨道。

在(8.355)式中，若取 $\sigma=0$，则它变为(8.327)式。因此文梯型中间轨道实际上是阿克谢诺夫型中间轨道的特例。若再取 $c=0$，即二个主星体合并为一个中心体，这时二个不动中心问题就退化为一个二体问题，中间轨道的解也就变为二体问题的解即圆锥曲线。

对于文梯型中间轨道和阿克谢诺夫型中间轨道与二体问题相类似都可以引进中间轨道的轨道根数，进行轨道计算。另外，还可以引进类似的摄动理论进行摄动计算，考虑更精确的解。但是，由于中间轨道的解中包含有椭圆积分，因此在作轨道计算特别是摄动计算时就更加复杂一些。

第九章　月球火箭和行星际火箭轨道理论

自从1957年10月4日人类历史上出现第一颗人造天体以来，世界各国总共成功地发射了二千多次人造天体．在目前发射成功的人造天体中，除了人造地球卫星以外，还有另外三类人造天体：月球探测器、行星探测器和恒星探测器，它们约有一百颗左右．

月球探测器包括飞月火箭、绕月火箭、击中月球火箭、登月飞船和人造月球卫星等．月球探测器在地球、太阳和月球引力作用下在地月空间或者围绕月球运动着．第一颗月球探测器是1959年1月3日苏联发射的"月球1号"（Луник-1）．行星探测器包括飞向、绕转和击中行星的火箭，行星表面软着陆的飞船，人造小行星和人造行星卫星等．行星探测器在地球、太阳、邻近行星和目标行星的引力作用下在行星际空间或者围绕目标行星运动着．第一颗行星探测器是1961年2月12日苏联发射的"卫星8号"（Спутник-8）．恒星探测器是最终脱离太阳系飞向目标恒星的人造天体．恒星探测器在太阳和目标恒星引力作用下在宇宙空间运动着．当它在太阳系内运动时，可以看成是一个行星探测器．到目前为止，只有美国发射了二颗恒星探测器，一颗是1977年8月20日发射的"旅行者2号"（Voyager-2），另一颗是1977年9月5日发射的"旅行者1号"（Voyager-1）．

人造天体的用途是极其广泛的．利用人造地球卫星可以进行通讯联系、气象预报、地球资源考察、大地测量、导航、各种军事任务和科学考察等．利用月球探测器、行星探测器和恒星探测器可以直接对月球、行星、太阳系和宇宙空间进行实地考察．因此研究人造天体的运动轨道不仅具有重要的理论意义而且具有重大的实用价值．目前人造天体的轨道理论已经成为天体力学和天文动力学中一个重要的内容．在第七章和第八章中，我们已经详细地介

绍了人造地球卫星的运动情况，本章介绍月球火箭、人造月球卫星和行星际火箭的运动情况。

§1 地月空间中的轨道

月球探测器在地月空间中运动，它们的运动轨道大致可以分为下列四种类型：

(1) 在地球附近的轨道。

(2) 从地球附近到月球附近的过渡轨道及相反过程的轨道。

(3) 在月球附近的轨道。

(4) 在地球上发射和月球上着陆的轨道以及相反过程的轨道。

作用在月球探测器上的力有以下几种：

(1) 火箭动力。

(2) 地球的引力。

(3) 地球大气的阻力。

(4) 月球的引力。

(5) 太阳的引力。

(6) 行星的引力。

(7) 太阳辐射压力。

(8) 电磁力和太阳等离子体流的作用力。

当月球探测器处于第一种类型轨道时象人造地球卫星一样主要考虑地球的引力和地球大气的阻力；另外还要考虑月球的引力和太阳的引力。当月球探测器处于第二种类型轨道时主要考虑地球的引力和月球的引力；另外还要考虑太阳的引力。当月球探测器处于第三种类型的轨道时，主要考虑月球的引力；另外地球的引力也不容忽视。当月球探测器处于第四种类型轨道或者处于轨道转换而需要采用火箭推力时，主要考虑火箭的动力；另外再考虑相应的摄动力。如果月球探测器的截面质量比比较大的话，还应当考虑太阳辐射压力。通常情况下行星的引力，电磁力和太阳等离

子体的作用是很小的，可以不予考虑。

对于第一种类型轨道，我们可以采用地心为坐标原点，类似于人造地球卫星运动，把地球的形状、大气阻力、日、月引力等作为摄动来讨论月球探测器相对于地心的运动情况。如果利用驻留轨道(关于驻留轨道可以参看本章§6)作为第一种类型轨道时，它本身就属于人造地球卫星。关于这种类型轨道已经在第七章和第八章中详细作了介绍。对于第二种类型轨道，我们利用二体问题中引力范围的概念，当月球探测器处在月球引力范围之外时，可以取地心为坐标原点，讨论月球探测器相对于地心的运动情况；当月球探测器进入月球引力范围之内时，可以取月心为坐标原点，讨论月球探测器相对于月心的运动情况。凡是月球探测器都要经历这种轨道，我们可以称这种类型的轨道为月球火箭轨道，在§2中将要介绍这种轨道。对于第三种类型轨道，我们采用月心为坐标原点，类似于人造月球卫星运动，把月球的形状、地球和太阳的引力等作为摄动来讨论月球探测器相对于月心的运动情况。如果利用驻留轨道作为第三种类型轨道时，它本身就属于人造月球卫星。关于这种类型轨道将在本章§3中再作介绍。对于第四种类型轨道，我们可以把月球探测器处理成一个在有摄动情况下的变质量物体运动。它属于火箭动力学范畴。关于这种类型轨道读者可以参看有关火箭运动学和火箭动力学方面的书。

在已发射的月球探测器中，有些月球探测器，例如飞月火箭和绕月火箭等只经历了其中几种类型的轨道；但是有些探测器，例如美国发射的阿波罗(Apollo)登月飞船却经历了所有这四种类型的轨道。在表9-1中刊载了1972年4月16日"阿波罗16号"(Apollo-16)的飞行纪录。从飞行纪录中可以看出"阿波罗16号"确实经历了这四种类型的轨道。

§2　月球火箭轨道理论

1956年叶戈罗夫(Егоров)等对月球火箭的运动作了比较全面

表 9-1 “阿波罗16号”飞行记录

发射后经过的时间		东经 135°(东京)标准时			内容
时	分	日	时	分	
	0	17	2	54	发射
	13		3	7	进入预定轨道
2	33		5	27	进入飞往月球的轨道
3	19		6	13	月球着陆船与飞船接通(连接)
30	39	18	9	33	第一次轨道改正
74	29	20	5	23	进入围绕月球的卫星轨道
75	19		6	13	第三级火箭与月球相撞引起人造地震
78	33		9	27	转人下降轨道
96	13	21	3	7	月球着陆船与飞船分离
97	41		4	35	发现了机械船的故障
103	22		10	16	完成了使飞船本体移至圆轨道的喷射
104	17		11	11	开始喷射下降
104	29		11	23	在月球表面着陆
118	53	22	1	47	开始了第一次在月面上的活动
119	4		1	58	飞船船长到达月面
119	6		2	0	宇航员到达月面
120	51		3	45	开始安装科学观测装置
126	4		[illegible]	58	第一次月面活动终了(用时 $7^{h}11^{m}$)
142	39	23	1	33	第二次月面活动开始
150	2		8	56	第二次月面活动终了(用时 $7^{h}23^{m}$)
165	31	24	0	25	第三次月面活动开始
169	6		4	0	完成宇宙飞船的轨道面的变动
171	11		6	5	第三次月面活动终了(用时 $5^{h}40^{m}$)
175	32		10	26	离开月球表面
177	41	25	0	35	与宇宙飞船对接
195	0		5	54	月球着陆船与宇宙飞船分离
196	2		6	56	发射了二颗月球小卫星
200	21		11	15	进入返回地球的轨道
214	35	26	1	29	进行轨道改正
218	49		5	43	宇宙游泳活动开始
219	51		6	45	宇宙游泳活动结束
243	26	27	6	20	在宇宙空间接见记者(20 分钟)
265	51	28	[illegible]	45	在夏威夷南 2800km 的太平洋中部着水

的研究，得到不少有用的结果。

目前讨论月球火箭的运动主要采用分析方法和数值方法二种。通常利用分析方法研究月球火箭运动的一般规律，从分析方法中所得到的结果作为数值方法中月球火箭的初始位置和速度的近似值，然后再利用数值方法在考虑各种摄动作用下精确地计算出月球火箭的运动轨道。

利用分析方法讨论月球火箭运动时，通常把它处理成单二体问题(地球-月球火箭）和双二体问题（地球-月球火箭和月球-月球火箭）。另外，也有人利用限制性三体问题(地球-月球-月球火箭)和限制性四体问题(地球—月球-太阳-月球火箭)，来讨论月球火箭的运动。

1. 用二体问题来讨论月球火箭轨道

根据引力作用范围的定义（可参见本章 §4）在地月空间中月球的作用范围半径是

$$\rho^* = \left(\frac{m}{M}\right)^{2/5} a_0, \tag{9.1}$$

其中 m 和 M 分别是月球和地球的质量，a_0 是地月距离。

将 $\frac{m}{M} = \frac{1}{81.301}$ 和 $a_0 = 384401$ 公里代入(9.1)式后，可得月球的作用范围半径是 66183 公里，因此月球火箭绝大部分时间是在月球作用范围之外运动。如果忽略月球的引力和其它摄动作用，则月球火箭在地球中心引力作用下的运动可以当作为一个二体问题。这时月球火箭的运动轨道是一个圆锥曲线。对于不同的发射速度，月球火箭轨道分别是一个椭圆轨道，抛物线轨道或者是双曲线轨道。但是，只有椭圆轨道才能使月球火箭在无火箭推力作用下既可以使它在到达远地点前从正面击中月球（这时称为上升轨道），也可以使它在过远地点后绕到月球背面去击中月球(这时称为下降轨道)，或者绕过月球背面再返回地球。

假设月球火箭在进入地月飞行轨道 t_0 时的地心位置和速度是 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0$，利用二体问题公式不难计算出它的轨道。对于椭圆轨

道和双曲线轨道有六个轨道根数，对于抛物线轨道有五个轨道根数 根据月球火箭的轨道根数可以得到它在地月空间中的运动是

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r\cos f\boldsymbol{P} + r\sin f\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{v} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin f\boldsymbol{P} + \sqrt{\frac{\mu}{p}}(e+\cos f)\boldsymbol{Q} \end{aligned}\right\}. \tag{9.2}$$

其中 $\mu = GM$, $p = \frac{(\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0)^2}{\mu}$; $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别是月球火箭在轨道面内真近点角 $f = 0$ 和 $f = \frac{\pi}{2}$处的方向，它们是轨道根数 i、Ω 和 ω 的函数。

月球火箭的地心距离是

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+e\cos f} \text{（椭圆和双曲线轨道）} \\ r &= \frac{p}{1+\cos f} \text{（抛物线轨道）} \end{aligned}\right\}. \tag{9.3}$$

利用朗伯特和欧拉方程可以得到月球火箭沿着椭圆、抛物线和双曲线轨道从轨道上某点 P_1 飞到另一点 P_2 的飞行时间，

椭圆轨道：

$$\Delta t = \frac{1}{n}[(\varepsilon - \sin\varepsilon) - (\delta - \sin\delta)]. \tag{9.4}$$

其中 $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, $\cos\varepsilon = 1 - \frac{r_1 + r_2 + \sigma}{2a}$, $\cos\delta = 1 - \frac{r_1 + r_2 - \sigma}{2a}$;

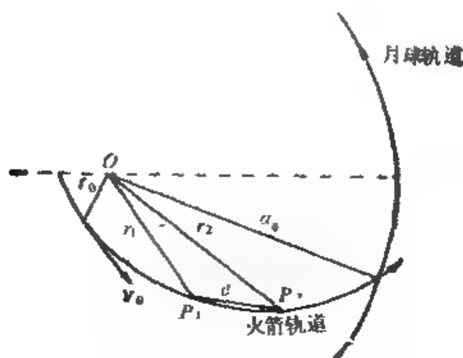


图 9-1

r_1 和 r_2 分别是月球火箭在 P_1 和 P_2 点的地心距离，σ 是 P_1 和 P_2 二点之间的弦长，由图 9-1 可得：

$$\sigma = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(f_2 - f_1)}. \tag{9.5}$$

这里 f_1 和 f_2 分别是月球火箭在 P_1 和 P_2 点的真近点角。

如果月球火箭处于上升轨道，则取 $0 < \varepsilon < \pi$ 和 $0 < \delta < \pi$；如果月球火箭处于下降轨道，则取 $\pi < \varepsilon < 2\pi$ 和 $-\pi < \delta < 0$。

抛物线轨道：

$$\Delta t = \frac{1}{6\sqrt{\mu}}[(r_1 + r_2 + \sigma)^{3/2} - (r_1 + r_2 - \sigma)^{3/2}]. \tag{9.6}$$

其中 σ 可以从(9.5)式求出。

双曲线轨道：

$$\Delta t = \frac{1}{|n|}[(\mathrm{sh}\varepsilon' - \varepsilon') - (\mathrm{sh}\delta' - \delta')]. \tag{9.7}$$

其中

$$|n| = \sqrt{\frac{\mu}{|a|^3}}, \quad \mathrm{ch}\varepsilon' = 1 + \frac{r_1 + r_2 + \sigma}{2|a|}, \quad \mathrm{ch}\delta' = 1 + \frac{r_1 + r_2 - \sigma}{2|a|};$$

σ 仍可以从(9.5)式求出。

由图 9-1 可以看出，当月球火箭飞行到它的地心距离 r 等于地月距离 a_0 时，月球火箭才能击中月球。利用(9.3)式可以算出这时月球的真近点角。

椭圆轨道

$$f_2 = \begin{cases} \pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{a_0 - p}{e a_0}\right) & (\text{上升轨道}), \\ \pi + \cos^{-1}\left(\dfrac{a_0 - p}{e a_0}\right) & (\text{下降轨道}). \end{cases} \tag{9.8}$$

抛物线轨道

$$f_2 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{a_0 - p}{a_0}\right). \tag{9.9}$$

双曲线轨道

$$f_2 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{a_0 - p}{e a_0}\right). \tag{9.10}$$

在(9.4)、(9.6)和(9.7)式中，我们取 $r_1=r_0$，$r_2=a_0$，就可以得到月球火箭沿着轨道从入轨到击中月球所需要的飞行时间。

如果月球火箭的初始速度 v_0 越小，则它的轨道半长径 a 就越小。显然当 $a<\frac{1}{2}a_0$ 时，月球火箭就不可能到达月球。因此，我们可以选用这样的月球火箭轨道，使月球火箭在轨道的近地点入轨，在轨道的远地点通过月球中心。这样的轨道最节省能量，通常称为最小能量轨道。

利用二体问题公式，很容易得到月球火箭最小能量轨道的轨道半长径和偏心率分别是

$$a=\frac{1}{2}(r_0+a_0),\quad e=\frac{a_0-r_0}{a_0+r_0}.\tag{9.11}$$

这时月球火箭在发射时刻 t_0 和击中月球时刻 t_2 时的地心速度分别是：

$$v_0=\sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}},\quad v_2=\sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}}\tag{9.12}$$

月球火箭从发射到击中月球的飞行时间是：

$$\Delta t=t_2-t_0=\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.\tag{9.13}$$

月球火箭在距离地心为 r_0 处围绕地球作圆轨道运动的环绕速度是：

$$v_c=\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}.\tag{9.14}$$

利用(9.12)和(9.14)式可以得到月球火箭从圆轨道过渡到击中月球的最小能量轨道所需要增加的速度是：

$$\Delta v_0=v_0-v_c=\sqrt{\mu}\left[\sqrt{\frac{1+e}{a(1-e)}}-\sqrt{\frac{1}{r_0}}\right].\tag{9.15}$$

作为一个例子，如果将月球火箭发射到距离地面高度为560公里处入轨，并取 $\mu=398603$ 公里^3/秒^2 和 $a_0=384401$ 公里，则利用(9.11)、(9.12)、(9.13)和(9.15)式可以算出这时月球火箭轨道的 $a=195670$ 公里，$e=0.964542$，$v_0=10.6238$ 公里/秒，

$v_2 = 0.191749$ 公里/秒，$\Delta t = 119.64$ 小时，和 $\Delta v_c = 3.0442$ 公里/秒。

由(9.4)式可以看出，月球火箭轨道的半长径 a 越小，则飞行时间 Δt 就越长．当月球火箭沿着最小能量轨道飞行时，$r_0 + r_2 = \sigma = 2a$，故 $\varepsilon = \pi$，$\delta = 0$．由(9.4)式可得 $\Delta t = \frac{\pi}{n}$，它就是(9.13)式，这说明沿着最小能量轨道飞行的时间最长。

如果我们采用抛物线轨道作为击中月球的火箭轨道的话，这时月球火箭从圆轨道转换到抛物线轨道所需要增加的速度是：

$$\Delta v_c = (\sqrt{2} - 1)v_c = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}. \qquad (9.16)$$

假设月球火箭在轨道近地点入轨，直接利用抛物线轨道的开普勒方程可得月球火箭沿着抛物线轨道从入轨到击中月球的飞行时间是：

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{\mu}}r_0^{3/2}\left(\operatorname{tg}\frac{f_2}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{f_2}{2}\right). \qquad (9.17)$$

其中 f_2 是月球火箭在击中月球时的真近点角．利用抛物线轨道方程(9.3)式可得：

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \left(\frac{a_0}{r_0} - 1\right)^{1/2}. \qquad (9.18)$$

将(9.18)式代入(9.17)式后，可以得到：

$$\Delta t = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{\mu}(a_0 - r_0)\right]^{1/2}(a_0 + 2r_0). \qquad (9.19)$$

利用(9.16)和(9.19)式可以算出对于距离地面高度为560公里的月球火箭沿着抛物线轨道从入轨到击中月轨的飞行时间是 $\Delta t = 50.75$ 小时，将月球火箭从圆轨道转换为抛物线轨道所要增加的速度 $\Delta v_c = 3.1396$ 公里/秒。

由这二个例子可以看出，只要将月球火箭的速度增加不到0.1公里/秒，则它从入轨到击中月球的飞行时间可以缩短一半以上。因此从节省飞行时间角度来说，利用抛物线轨道或者双曲线

轨道作为击中月球的月球火箭轨道还是比较合算的。事实上从表9-1所刊载的"阿波罗16号"飞行记录来看，月球火箭从入轨到进入围绕月球的卫星轨道的飞行时间大约是30个小时左右。因此"阿波罗16号"大致是沿着一条与抛物线相近的双曲线轨道飞行的。

2. 用双二体问题来讨论月球火箭轨道

利用引力作用范围可以把月球火箭的运动作为一个双二体问题。当月球火箭在月球引力作用范围之外时，可以忽略月球的引力和其它摄动作用，把它在地球中心引力作用下的运动当作一个二体问题。当月球火箭运动到月球引力作用范围，即距离月心66183公里之内时，可以忽略地球的引力和其它摄动作用，把它在月球中心引力作用下的运动也作为一个二体问题。

首先我们来求月球火箭进入月球作用范围时的真近点角及地心距离。

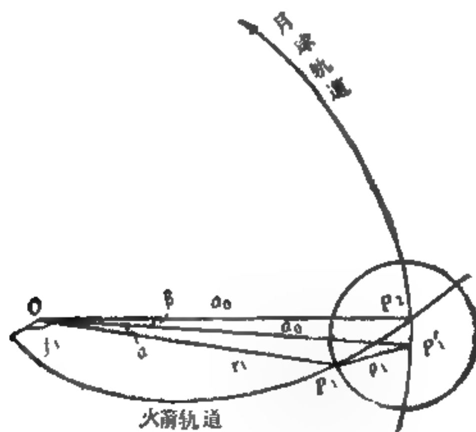


图 9-2

为了方便起见，假设月球火箭是在月球轨道面即白道面内运动，这时成为一个平面问题。由图9-2可以看出，当月球火箭沿着轨道飞行到P_1位置时，它进入月球的作用范围，P_1点称为入口。这

时月球位于图中的 P_1 位置。当月球火箭飞行到 P_2 位置时，月球也正好运动到那里，这时月球火箭才可能击中月球。

由图 9-2 可得月球火箭在入口处与月心的距离的平方是

$$\rho_1^2 = r_1^2 + a_0^2 - 2r_1a_0\cos\alpha, \qquad (9.20)$$

在(9.20)式中，取 $\rho_1 = \rho^* = 66183$ 公里。r_1 是月球火箭在入口处的地心距离，如果知道这时的真近点角 f_1，则可以从(9.3)式求出 r_1。α 是 P_1 和 P_1' 点的地心张角，有 $\alpha = f_2 - f_1 - \beta$。其中 f_2 根据月球火箭的轨道类型可以从(9.8)、(9.9)或者(9.10)式算出。β 是 P_1' 和 P_2 点的地心张角。设月球围绕地球运动的角速度为 n'，则 $\beta = n'\Delta t$。这里 Δt 是月球火箭沿着其轨道从 P_1 飞行到 P_2 所需要的时间。对于不同的轨道类型，利用(9.4)、(9.6)或者(9.7)式，并且令 $r_2 = a_0$ 可以算出 Δt。因此(9.20)式是只有一个未知量 f_1 的一个超越方程。我们采用数值方法可以计算出月球火箭在入口处的真近点角 f_1。对于椭圆轨道，它有二个解，一个解相应于上升轨道，另一个解相应于下降轨道。

将 f_1 的值代入 (9.3) 式后可得月球火箭在入口处的地心距离 r_1。根据 r_1 和 f_1，就可以从(9.2)式计算出月球火箭在入口处的地心位置 $\boldsymbol{r}_1$ 和速度 $\boldsymbol{v}_1$。

当月球火箭进入月球引力作用范围后，就可以把月球火箭运动当作为它与月球的二体问题。这时需要进行坐标系的转换，把原来月球火箭相对于地心的运动转换为相对于月心的运动。

首先由 (9.20) 式求出 P_1 和 P_1' 的地心张角 α，得到 P_1' 的地心位置 $\boldsymbol{a}_0$。这时月球火箭在入口处相对于月心的位置显然是

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{a}_0. \qquad (9.21)$$

假设月球围绕地球作圆轨道运动(月球轨道偏心率是 0.055，可以忽略)，运动线速度 $v' = 1.0232$公里/秒，运动的方向是与地月联线相垂直的。图 9-2 可得当月球位于 P_1' 时，它的运动方向应当与 OP_1' 垂直，或者说与图中的横轴夹角为 $f_1 + \alpha - \frac{\pi}{2}$。这样我们可以得到月球在 P_1' 处相对于地心的速度 $\boldsymbol{v}'$。因此月球火箭在

入口处相对于月心的速度是

$$u_1 = v_1 - v^{-1}. \tag{9.22}$$

由(9.21)和(9.22)式可以得到月球火箭在入口处相对于月心的位置 ρ_1 和速度 u_1。同样利用二体问题公式可以算出月球火箭相对于月球的运动轨道。

在入口处相对于月球的抛物线速度(又称脱离速度)是

$$u_e = \sqrt{\frac{2\mu'}{\rho_1}}. \tag{9.23}$$

其中 $\mu' = Gm$，m 是月球的质量，有 $\mu' = 4902.81$ 公里^3/秒^2。由(9.23)式，我们可以算出 $u_e = 0.3849$ 公里/秒。

通常情况下月球火箭在入口处的地心速度 v_1 与月球的地心速度 v' 之间的夹角不会太小，否则 v_1 将很小。由于 $|v'| = 1.0232$ 公里/秒，故由(9.22)式可得总有 $|u_1| = u_1 > u_e$。这意味着月球火箭在月球引力范围内相对于月球的运动轨道是一条双曲线轨道。根据由 ρ_1 和 u_1 算出的双曲线轨道根数，我们可以得到月球火箭在月球作用范围内的运动是：

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho\cos f P + \rho\sin f Q \\ u &= -\sqrt{\frac{\mu'}{p}}\sin f P + \sqrt{\frac{\mu'}{p}}(e + \cos f) Q \end{aligned}\right\}. \tag{9.24}$$

其中 $p = \frac{|\rho_1 \times u_1|^2}{\mu'}$，$\rho = \frac{p}{1 + e\cos f}$。

利用(9.7)式可以得到月球火箭从入口处到击中月球或者飞经月球附近的飞行时间 $\Delta t'$，其中 μ 改为 μ' 即可。因此月球从入轨到击中月球或者是飞经月球附近总共所需要飞行的时间应是 $\Delta t + \Delta t'$。

对于月球火箭从月球返回地球的相反轨道的计算完全类似。在月球作用范围内，它相对于月心仍然是一条双曲线轨道。当月球火箭再次到达月球作用范围的边界处(这点称为出口)仍然利用坐标系的转换，可以把月球火箭在出口处相对于月心的运动转换为相对于地心的运动。根据月球火箭在出口处的地心位置和速度

再算出它相应的轨道和以后的运动。

3. 用圆型限制性三体问题来讨论月球火箭轨道

如果忽略太阳的引力和其它摄动作用并且认为月球运动轨道是圆轨道的话，则月球火箭在地球中心引力和月球中心引力作用下的运动可以当作为一个圆型限制性三体问题。

月球火箭在以地月系的质心为坐标原点，以地月联线为 x 轴的旋转坐标系中的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \tag{9.25}$$

其中 n' 为月球运动角速度

$$\Omega = \frac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2) + \frac{GM}{r} + \frac{Gm}{\rho}. \tag{9.26}$$

(9.25)式得不到一般分析解，而只有五个特解，这五个特解是常数解，其中三个是直线解，二个是三角解，统称为平动点。如图4-3所示，P_1 和 P_2 分别表示地球和月球；L_1、L_2 和 L_3 表示直线解，L_4 和 L_5 表示三角解. 利用地月系中的 $\mu = \frac{m}{M+m} = 0.01215$，可以求出这五个平动点的位置：在表 9-2 中分别列出了 L_1、L_2、L_3、L_4 和 L_5 与地球和月球的距离 r 和 ρ。

表9-2　月球火箭的平动点位置和相应的初始速度

	r	ρ	C	v_0(公里/秒)
L_2	0.849154	0.150846	3.1881	10.8489
L_1	1.167724	0.167724	3.1720	10.8497
L_3	0.992626	1.992626	3.0121	10.8574
L_4 和 L_5	1	1	2.9880	10.8585

注：表中 r、ρ 和 C 是采用理论单位制. 在地月系中，相应的理论单位制是以地月距离为距离单位，地月质量之和为质量单位，这时时间单位为 $\frac{1}{2\pi}$ 恒星月。

方程(9.25)式存在有一个能量积分即雅可比积分为

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2\Omega-C。\tag{9.27}$$

其中 C 是积分常数，它决定于月球火箭的初始位置和速度。如果月球火箭的初始位置不变，则 C 就唯一的由月球火箭的初始速度 v_0 来决定。

在(9.27)式中，置月球火箭的运动速度为零，可得它的零速度面是：

$$n^2(x^2+y^2)+\frac{2GM}{r}+\frac{2Gm}{\rho}=C。\tag{9.28}$$

利用零速度面可以决定火箭所能运动的区域。如图 4-4 所示，当火箭的初始速度 v_0 小于 $v_0(L_i)$ 时，$C=C_1$，这时火箭不可能穿过曲面到达月球而成为月球火箭。当 v_0 增加到 $v_0(L_2)$ 时，C 减小到 $C_2=C(L_2)$，这时火箭才可能通过 L_2 到达月球成为月球火箭。当 v_0 增加到 $v_0(L_1)$ 时，C 减小到 $C_3=C(L_1)$，火箭有可能经过月球后通过 L_1 点飞向宇宙空间。当 v_0 增加到 $v_0(L_3)$ 时，C 减小到 $C_4=C(L_3)$，火箭还可能通过 L_3 点飞向宇宙空间。当 v_0 增加到 $v_0(L_4)$ 时，C 减小到 $C_5=C(L_4)$ 火箭可以从任何方向飞向宇宙空间。因此要使月球火箭只在地月空间附近运动的话，必须限制它的初始速度在 $v_0(L_2)$ 和 $v_0(L_1)$ 之间。利用(9.26)、(9.27)和(9.28)式可以算出对应于平动点 L_i 的 $C(L_i)$ 和月球火箭的一组初始速度 $v_0(C_i)$，它们列在表 9-2中。

如果采用数值方法计算月球火箭的精确轨道时，可以在双二体问题的基础上考虑各种摄动作用。当月球火箭在月球作用范围之外，利用数值方法算出它相对于地心的运动 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$。当月球火箭到达入口时采用坐标变换将它转换为相对于月心的运动。然后再利用数值方法继续计算月球火箭在月球作用范围内相对于月心的运动 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{u}$，直到击中月球或者经过月球附近为止。对于月球火箭从月球返回地球的轨道可以采用相反的过程。

§3 人造月球卫星轨道理论

在月球的引力作用下围绕月球运动的人造天体称为人造月球卫星。第一颗人造月球卫星是 1966 年 3 月31日苏联发射的"月球10 号" (Луник-10). 它的质量是 1600 千克，它的初始轨道参数是：近月点高度 350 公里，远月点高度 1017 公里，轨道周期 178.3 分钟，轨道平面与月球赤道平面的倾角71°.9。

利用人造月球卫星可以精确地测定月球的重力场和重力瘤，详细地绘制月面图，拍摄月球背面的照片，进行近月空间中的物质、辐射以及地球磁场和月球物理的考察工作。因此研究人造月球卫星的运动轨道也具有重要的意义。人造月球卫星的轨道设计和运动研究是人造天体轨道理论中的一个重要内容。

月球的平均半径是 1738 公里。月球表面的环绕速度是 1.680 公里/秒，逃逸速度是 2.375 公里/秒。在距离月面高度为 1000 公里处，环绕速度和逃逸速度分别降低到1.338公里/秒和1.892公里/秒，要成为人造月球卫星，它相对于月球的运动速度应当介于环绕速度和逃逸速度之间。由本章 §2 讨论知道：从地球发射月球火箭，当它进人月球作用范围后相对于月心的运动轨道大致是一条双曲线轨道，因此在无火箭推力作用下至少在第一圈不可能成为人造月球卫星。许多人研究了关于月球俘获月球火箭成为人造月球卫星的可能性问题。早在 1930 年霍普夫(Hopf) 已经证明了在圆型限制性三体问题中，当 $t\to\infty$时，小天体或者跑到无穷远处或者回到初始点的无限小邻域内。1954年麦尔曼(Мерман)又把相应的结果推广到一般三体问题。利用他们的研究结果表明月球不可能俘获月球火箭而成为它的卫星。当然由于月球火箭在其它摄动力的作用下，经过多圈运动后也许有可能最后成为人造月球卫星。在通常情况下，要使月球火箭成为人造月球卫星是通过这样的途径实现的：当月球火箭运动到月球附近时利用火箭推力减小它的速度，使它相对于月球的轨道变成为一个椭圆轨道或者圆轨道。"月

球 10 号”就是这样成为第一颗人造月球卫星的。当“月球 10 号”飞行到距离月球表面 1000 公里时，在接近月球卫星轨道的远月点处利用火箭推力将它相对于月球的速度从 2.1 公里/秒降低到1.25 公里/秒（相应于轨道近月点处的速度约为 1.65 公里/秒）。这样“月球 10 号”就从双曲线轨道变为椭圆轨道了。

人造月球卫星和人造地球卫星一样都在非质点引力场中运动，并且分别受到日、地和日、月引力的作用。对于面积质量比比较大的卫星还都受到太阳的光压作用。因此人造月球卫星的运动与人造地球卫星的运动有许多类似之处。这样在第七章和第八章中有许多有关人造地球卫星运动的一些结果同样可以引用到人造月球卫星运动中来。但是由于月球周围没有覆盖着大气，因此在人造月球卫星运动中没有大气阻力。另外，日、地特别是地球对人造月球卫星的引力与日、月对人造地球卫星的引力相比要大得多（由下面讨论可以知道在离开月球表面约 1440 公里处，地球对人造月球卫星的引力与月球引力场中主要带谐项所产生的摄动力差不多相等），因此在人造月球卫星运动中，地球的引力将起重要的作用。所以人造月球卫星的运动并不完全与人造地球卫星的运动一样，而有其独特的规律。

作用在人造月球卫星上的力有以下几种：

（1）月球的引力。

（2）地球的引力。

（3）太阳的引力。

（4）行星的引力。

（5）太阳辐射压力。

（6）电磁力和太阳等离子体流的作用力。

一般说来，行星的引力，电磁力和太阳等离子体流的作用力都比较小，可以不予考虑。如果卫星的面积质量比比较小的话，太阳辐射压力也可以不考虑。这样作用在人造月球卫星上的力主要有三种：月球、地球和太阳的引力。

月球引力场与地球引力场相类似。在以月球的质心为坐标原

点，月球的赤道面为基本平面的坐标系中，月球引力场的位函数形式仍为(1.50)式。在位函数展式中，带谐系数 J_2 的数值最大，含 J_2 的项(称为主要带谐项)对人造月球卫星的运动影响最大。在仅考虑主要带谐项时，月球引力场位函数可以写为

$$V = \frac{Gm}{r}\left[1 - \frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{r}\right)(3\sin^2\varphi - 1)\right]. \tag{9.29}$$

式中 m 和 a_e 分别是月球的质量和赤道半径。r 和 φ 分别是人造月球卫星的月心距离和纬度。J_2 是月球引力场位函数展式中的主要带谐系数；它可以利用人造月球卫星来测定。1970 年库克(Cook)曾测得 $J_2 = 2.05 \times 10^{-4}$。

在人造月球卫星轨道理论中，我们也可以采用理论单位制。如果以月球的质量为质量单位，月球的平均半径 1738 公里为距离单位的话，则时间单位是 1034 秒或者17.25分钟。

由(9.29)式可得，月球形状对人造月球卫星所产生摄动的摄动函数为

$$R = -\frac{J_2}{2r^3}(3\sin^2\varphi - 1). \tag{9.30}$$

利用(7.191) 和 (7.192)式在忽略高次项式可得地球和太阳引力对人造月球卫星所产生摄动的摄动函数分别为

$$R_E = \beta_E r^2\left[\left(\frac{3}{2}\cos^2\phi_E - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{5}{2}\cos^3\phi_E - \frac{3}{2}\cos\phi_E\right)\right] \tag{9.31}$$

和

$$R_S = \beta_S r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\phi_S - \frac{1}{2}\right). \tag{9.32}$$

其中 $\beta_E = \frac{GM}{a_0^3}$，$\phi_E$ 是人造月球卫星和地球的月心张角；$\beta_S = \frac{GM_日}{a_日}$，这里 $M_日$ 表示太阳质量，$a_日$ 表示月日距离（它近似等于地日距离），ϕ_S 是人造月球卫星和太阳的月心张角。在我们所采用的理论单位制中，可以算出 $\beta_E = 7.514 \times 10^{-6}$ 和 $\beta_S = 4.244 \times 10^{-8}$。

在月心赤道直角坐标系中，人造月球卫星在月球、地球和太阳

的引力作用下，围绕月球运动的运动方程是：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r^3}\boldsymbol{r} = \nabla(R + R_E + R_S). \qquad (9.33)$$

其中 R、R_E 和 R_S 分别为(9.30)、(9.31)和(9.32)式。

解方程(9.33)结果就可以得到人造月球卫星相对于月球的运动情况。通常还是采用常数变异法即将人造月球卫星的运动形式写为：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma, t), \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(\sigma, t). \qquad (9.34)$$

其中 σ 为人造月球卫星轨道的轨道根数，如果求出轨道根数的变化情况就可以由(9.34)式得到人造月球卫星的运动规律。

下面我们首先比较一下各种摄动力的大小。

假设人造月球卫星在月球赤道面附近运动，即 $\varphi \approx 0$，这时利用(9.30)式和 J_2 的数值可以得到月球形状摄动对卫星所产生的加速度与月球中心引力加速度之比为

$$\varepsilon_M \sim 3.075 \times 10^{-4}\frac{1}{r^2}. \qquad (9.35)$$

显然当人造月球卫星运动到地月之间时，地球引力作用最显著。这时 $\psi_E = 0$，利用(9.31)式和 β_E 的数值可以得到地球引力对卫星所产生的加速度与月球中心引力加速度之比为

$$\varepsilon_E \sim 1.503 \times 10^{-5} r^3\left(1 + \frac{3}{2}d\right). \qquad (9.36)$$

其中 $d = \dfrac{r}{a_0}$ 是一个小量。

同样可得太阳引力对卫星所产生的加速度与月球中心引力加速度之比为

$$\varepsilon_S \sim 0.8488 \times 10^{-7} r^3. \qquad (9.37)$$

利用(9.35)、(9.36)和(9.37)式可以将 ε_M、ε_E 和 ε_S 与 r 的关系绘制成图 9-3。由图 9-3 或者利用(9.35)和(9.36)式可以得到当 $r = 1.829$ 即 3179 公里时 $\varepsilon_M \sim \varepsilon_E$。这说明在离开月球表面大约 1441 公里处，地球对人造月球卫星的引力作用几乎与月球引

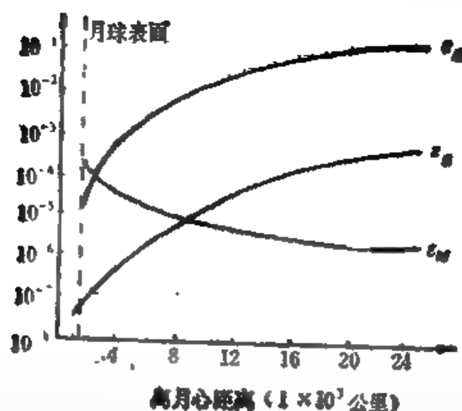


图 9-3

力场中主要带谐项的摄动大小一样。另外由图9-3或者利用(9.36)和(9.37)式还可以得到 $\varepsilon_E \sim 177\varepsilon_s$。这说明地球对人造月球卫星的引力作用比太阳的引力作用要大得多，因此作为一般讨论人造月球卫星运动时，可以暂且忽略太阳引力的影响。

利用第七章和第八章的结果，我们可以得到人造月球卫星在月球形状摄动和地球的引力作用下，它的轨道变化情况。

1. 长期变化

轨道根数 a、e 和 i 没有长期变化；轨道根数 Ω、ω 和 M_0 的长期变化系数是：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{4}a^{-7/2}(1+2e^2)(2J_2+\beta_E a^5)\cos i + O(J_2e^4,\beta_E a^5e^4) \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{3}{8}a^{-7/2}(1+2e^2)(4-5\sin^2 i)\Big\{2J_2+\beta_E a^5\Big[1- \\
&\qquad \frac{5(2-3\sin^2 i)}{2(4-5\sin^2 i)}e^2\Big]\Big\} + O(J_2e^4,\beta_E a^5e^4) \\
\frac{dM_0}{dt} &= \frac{1}{4}a^{-7/2}\left(1-\frac{3}{2}e^2\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\Big[6J_2-\beta_E a^5\Big(1+ \\
&\qquad \frac{3}{2}e^2\Big)\Big] + O(J_2e^4,\beta_E a^5e^4)
\end{aligned}\right\}.$$

(9.38)

由(9.38)式可以看出长期变化有二种：一种是由于月球形状摄动造成的，另一种是由于地球引力造成的。它们都比较小，通常使 Ω、ω 和 M_0 的移动每天不到 1°。这二者之比大约是 $\frac{2J_2}{\beta_E}a^{-5}=54.56a^{-5}$。如果人造月球卫星轨道半长径不太大，则长期变化大部分是由于月球形状摄动造成的。如果它的轨道半长径达到 2.225 即离月面的高度在 2130 公里左右，二者差不多。如果人造月球卫星轨道半长径相当大，则长期变化大部分是由于地球引力造成的。

2. 短周期变化

所有轨道根数都有短周期变化。短周期变化也有二种：一种是由于月球形状摄动造成的，另一种是由于地球引力造成的。变化周期相当于人造月球卫星的运动周期，大约在 100 分钟左右。变化振幅有二种：前者约 J_2a^{-2}，它将会使人造月球卫星的距离偏差在 0.3 公里左右，速度偏差在 0.3 米/秒左右；后者约 $\beta_E a^3$，对于轨道半长径不是很大的卫星所产生的偏差更小。这些短周期项由于变化周期短、振幅小，作为一般研究人造月球运动时往往可以忽略。

3. 长周期变化

轨道根数 a 没有长周期变化。其余五个轨道根数都有长周期变化。长周期变化共有三种：第一种变化是由于月球形状摄动造成的，第二种变化是由于地球引力造成的，第三种变化是由于这二者联合造成的。第一种变化的变化周期约 $\frac{2\pi a^{7/2}}{J_2}$，大约几年左右。变化振幅约 $J_2a^{-2}\simeq 2\times 10^{-4}$，它将会使人造月球卫星的距离偏差在 0.3 公里左右，速度偏差在 0.3 米/秒左右。第二种变化的变化周期约 $\frac{2\pi}{2n'}$，其中 n' 为月球的平均运动角速度，故在半个恒星月左右。变化振幅约 $\frac{\beta_E}{n'}a^{3/2}\simeq\beta_E\left(\frac{n}{n'}\right)a^3\simeq 2\times 10^{-3}$。第三种变化

的变化周期约 $\frac{2\pi a^{7/2}}{J_2}$，与第一种相同．变化振幅约 $\frac{\beta}{J_2}a^3 \simeq 4\times 10^{-2}$．显然在长周期变化中，第二种变化的变化周期较短，振幅较大，这说明地球引力对人造月球卫星轨道根数的长周期变化影响最明显．另外二种变化的变化周期太长，有时在一段时间内可以处理为长周期变化，不过这种长周期变化就更小了．第三种变化与第一种变化相比振幅要大差不多 200 倍，因此在长周期变化中一般只需要考虑第二种和第三种变化．这与人造地球卫星运动情况有显著的差别．

4. 轨道演化情况

人造月球卫星在月球形状摄动和地球、太阳引力作用下，轨道半长径 a 没有长期和长周期变化，因此它不会象人造地球卫星运动那样在大气阻力作用下轨道越来越低最后坠落到地球上来．但是轨道偏心率 e 有长周期变化．如果在一段时间内 e 不断地减小，这会使人造月球卫星的近月点高度增加，远月点高度减小，轨道越变越圆．例如第一颗人造月球卫星“月球 10 号”在它发射后二个月即 1966 年 5 月 30 日与地面无线电通讯中断时的近月点的高度为 378.7 公里，远月点高度是 985.3 公里，这说明轨道明显变圆了．相反如果在一段时间内 e 不断地加大，这会使人造月球卫星的近月点高度降低，远月点高度增加，轨道越来越偏．如果近月点高度降低得很低的话，有可能使人造月球卫星最后坠毁在月面上．由于长周期变化主要是地球引力作用造成的，因此决定人造月球卫星寿命的主要因素是地球引力．另外轨道倾角 i 也有长周期变化，结果使人造月球卫星的轨道平面有周期性摆动．例如“月球 10 号”在通讯中断时轨道倾角差不多降低了 1°．

由于月球的自转角速度很慢(与公转角速度一样)，因此尽管月球赤道扁率很小，但对人造月球卫星的运动影响也不小，它在一段时间内也会使卫星轨道的偏心率不断加大，近月点高度下降，最后造成卫星坠毁在月面上．另外，对于一些面积质量比比较大的人造月球卫星，在它们的运动中还需要考虑太阳光压作用．太阳

光压对卫星轨道根数的影响情况与人造地球卫星相类似. 1961年和1966年利多夫(Лидов)曾对人造月球卫星轨道演变情况作了详细的介绍,读者如有兴趣还可以进一步参看有关的文献.

最后谈一下关于静止月球卫星问题. 如果一个卫星围绕着月球运动,它的运动周期与月球的自转周期相同,那么相对月球表面来说这颗卫星是静止不动的. 它称为静止月球卫星. 由于月球自转很慢,自转周期与围绕地球的公转周期一样是27.322天, 利用开普勒第三定律可得静止月球卫星的轨道半长径大约是88735公里,这个距离已经超过了月球作用范围. 在地球引力作用下,这样的月球卫星围绕月球运动不到一圈就可能脱离了原来的轨道, 显然它是不稳定的. 但是在本章§2中已经指出, 如果把月球火箭的运动当作为圆型限制性三体问题时, 存在有五个平动点, 利用第四章的结果知道在圆型限制性三体问题中, 小主星体的质量 $\mu < 0.0385$时, 在平动点中 L_4 和 L_5 是稳定的. 在地月系中 $\mu = 0.01215$, 是符合这个条件. 因此如果将月球火箭发射到地月系中的 L_4 或者 L_5 处, 它将成为一个稳定的静止月球卫星. 另外也可以把地球看作为一个天然的静止月球卫星. 地球已经存在有许多亿年了,当然它也是一个稳定的静止月球卫星.

§4 行星际火箭轨道理论

在行星际空间飞行或者围绕目标行星运动着的人造天体称为行星探测器. 第一颗行星探测器是1961年2月12日苏联发射的"卫星8号". 这是一颗金星探测器, 它向金星发射火箭的质量是643.6千克,初始轨道参数是: 近日点距离 1.073×10^8 公里,远日点距离 1.522×10^8 公里,轨道周期300天, 轨道平面与黄道平面夹角是0°30. 利用表9-4所列出的金星和地球与太阳的平均距离可以看出这颗金星火箭几乎是在地球轨道平面内沿着差不多是最小能量轨道(关于最小能量轨道参见本章§5)飞行的. 这以后陆续向火星、木星、土星、水星和其它大行星以及太阳附近发射了各

种类型的行星探测器．由于金星和火星离开地球最近，因此向金星和火星发射的探测器是最早，而且数量最多，约占行星探测器总数的80%。表 9-3 列出了首次发射各种类型的行星探测器的情况。

表 9-3　首次发射各种类型行星探测器情况

序号	发射国家	发射时间 年	月	日	名　称	类　　型
1	苏联	1961	2	12	金星1号	行星探测器．它于1961年5月20日接近金星。
2	苏联	1975	6	8	金星9号	1975年10月22日成为人造金星卫星．
3	苏联	1962	11	1	火星1号	1963年6月11日接近火星．它是火星探测器．
4	苏联	1971	5	19	火星2号	1971年11月27日成为人造火星卫星，且把舱送到火星表面．
5	美国	1972	3	2	先驱者10号	1973年12月3日接近木星，它是木星探测器．
6	美国	1973	4	6	先驱者11号	1974年12月3日距离木星41000公里，进一步飞向土星．它是土星探测器．
7	美国	1973	11	3	水手10号	1974年2月5日接近金星，1974年3月29日距离水星640公里．它是水星探测器．
8	西德	1974	12	10	太阳神1号	距太阳最近处为4500万公里，是离太阳最近的行星探测器．
9	美国	1977	8	20	旅行者2号	1979年7月9日飞经木星，1981年8月27日飞经土星，1986年1月30日飞经天王星，1989年将飞经海王星，最后脱离太阳系．它是外行星探测器和恒星探测器．

利用行星探测器可以探测行星际空间（包括太阳附近）的磁场、辐射、小行星带、介质和陨石等；测定行星的质量，重力场和测量行星的磁场、大气成分、表面温度、压力等物理条件；拍摄行星表面和它的卫星、光环(土、木和天王星)的照片；从事行星及其卫星的物理研究工作．由于行星距离我们比较远，因此对行星探测器的轨道设计和轨道计算要求就更高些．行星探测器的轨道设计和运动研究也是人造天体轨道理论中的一个重要内容．

行星探测器在行星际空间中运动，它受到的作用力有以下几种：

(1) 火箭动力。

(2) 地球的引力.

(3) 地球大气的阻力.

(4) 月球的引力.

(5) 太阳的引力.

(6) 目标行星的引力.

(7) 目标行星(如果有大气)大气的阻力.

(8) 目标行星(如果有卫星或者环)的卫星或者环带的引力.

(9) 邻近行星(如果飞经的话)的引力.

(10) 其它行星的引力.

(11) 小行星带的引力.

(12) 空间介质的阻力和流星的碰撞.

(13) 太阳辐射压力.

(14) 电磁力和太阳等离子体流的作用力.

火箭动力作用的时间是十分暂短的,只有在地面发射,目标行星表面着陆和轨道转换以及相反过程或者在作必要的轨道修正时才有. 在通常情况下其它行星和小行星带的引力,行星际空间介质阻力和流星的碰撞以及电磁力和太阳等离子体流的作用力都很小可以不予考虑. 如果行星探测器的面积质量比比较小或者行星探测器距离太阳比较远的话,太阳辐射压力也很小,可以忽略. 地球大气阻力和目标行星大气阻力仅仅发生在地球和目标行星附近. 月球引力和目标行星卫星或者环带的引力也主要发生在离开地球和目标行星不太远的区域里. 因此行星际火箭在它的运动轨道上绝大部分时间只受到地球、太阳、目标行星和邻近行星的引力作用. 这时行星际火箭的运动可以当作为限制性四体问题或者限制性多体问题. 目前讨论行星际火箭运动的方法主要还是采用数值方法.

在研究行星际火箭轨道时,常常利用作用范围概念.

在图 9-4 中,点 R、P 和 S 分别表示火箭、行星和太阳. 假设行星和太阳的质量分别为 m 和 M,火箭的质量可以忽略. 利用第四章的结果可得火箭在日心坐标系中相对太阳 S 的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_R + GM\frac{\boldsymbol{r}_R}{r_R^3} = -Gm\left(\frac{\boldsymbol{r}_{RP}}{r_{RP}^3} + \frac{\boldsymbol{r}_P}{r_P^3}\right). \tag{9.39}$$

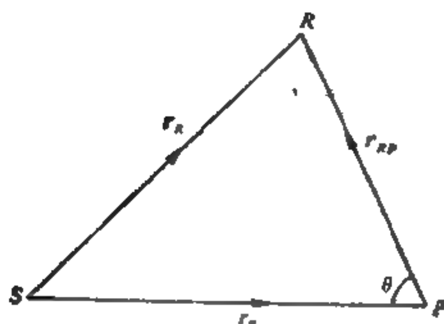


图 9-4

同样如果采用星心坐标系可得火箭相对于行星 P 的运动方程是:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{RP} + Gm\frac{\boldsymbol{r}_{RP}}{r_{RP}^3} = -GM\left(\frac{\boldsymbol{r}_R}{r_R^3} - \frac{\boldsymbol{r}_P}{r_P^3}\right). \tag{9.40}$$

如果令:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_s = GM\frac{\boldsymbol{r}_R}{r_R^3}, \qquad \boldsymbol{A}_P = Gm\frac{\boldsymbol{r}_{RP}}{r_{RP}^3} \\ &\boldsymbol{P}_P = -Gm\left(\frac{\boldsymbol{r}_{RP}}{r_{RP}^3} + \frac{\boldsymbol{r}_P}{r_P^3}\right), \quad \boldsymbol{P}_s = -GM\left(\frac{\boldsymbol{r}_R}{r_R^3} - \frac{\boldsymbol{r}_P}{r_P^3}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{9.41}$$

则(9.39)和(9.40)式分别化为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_R + \boldsymbol{A}_s = \boldsymbol{P}_P. \tag{9.42}$$

和

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{RP} + \boldsymbol{A}_P = \boldsymbol{P}_s. \tag{9.43}$$

$|\boldsymbol{P}_P|/|\boldsymbol{A}_s|$ 表示火箭在日心坐标系中，行星的摄动与太阳的引力之比；$|\boldsymbol{P}_s|/|\boldsymbol{A}_P|$ 表示火箭在星心坐标系中，太阳的摄动与行星的引力之比。当这二个比值相等时，它的边界被定义为作用范围。蒂塞朗(Tisserand)得到了这个边界与行星的距离是:

$$r_A = \left(\frac{m}{M}\right)^{2/5} r_P \frac{1}{\sqrt[10]{1 + 3\cos^2\theta}} \tag{9.44}$$

由(9.44)式可以看到行星的作用范围是以行星为中心，几乎是一个以 r_A 为半径的一个球面，通常就用球面来代替。取 $\theta = 0$ 这时这个球面的半径是 $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\left(\frac{m}{M}\right)^{2/5} r_p$。为方便起见，通常取作用范围半径为

$$r_A = \left(\frac{m}{M}\right)^{2/5} r_p. \tag{9.45}$$

对于地月空间，月球作用范围半径就是(9.1)式。

显然当火箭运动在行星作用范围内，$|\boldsymbol{P}_p|/|\boldsymbol{A}_s| > |\boldsymbol{P}_s|/|\boldsymbol{A}_p|$，这时采用星心坐标系，将太阳对火箭的引力处理为摄动较好。如果火箭运动到行星作用范围外时，$|\boldsymbol{P}_p|/|\boldsymbol{A}_s| < |\boldsymbol{P}_s|/|\boldsymbol{A}_p|$，这时采用日心坐标系，将行星对火箭的引力处理为摄动更好些。

太阳的摄动与行星的引力之比可令为 ε_s，即

$$\varepsilon_s = \frac{|\boldsymbol{P}_s|}{|\boldsymbol{A}_p|}. \tag{9.46}$$

当火箭运动在行星附近时，ε_s 变得很小。为了方便起见我们给定一个数值，例如 $\varepsilon_s = 0.01$。当 ε_s 小于这个数值时，能够忽略太阳的摄动作用。这时火箭相对于行星的运动完全可以处理为一个二体问题。相应于 ε_s 这个值的边界称为内作用范围。

同样令行星的摄动与太阳的引力之比为 ε_p，即

$$\varepsilon_p = \frac{|\boldsymbol{P}_p|}{|\boldsymbol{A}_s|}. \tag{9.47}$$

当火箭运动远离行星时，ε_p 也将变得很小。同样也可以限定 ε_p 的数值，当 ε_p 小于这个数值时，能够忽略行星的摄动作用。这时火箭相对于太阳的运动也可以处理为一个二体问题。相应于 ε_p 这个值的边界称为外作用范围。

假设火箭位于行星和太阳的联线上，利用(9.41)、(9.46)和(9.47)式不难得到行星内、外作用范围半径为

$$\varepsilon_s = \frac{M d^2}{m}\left[1 - (1 + d)^{-2}\right]. \tag{9.48}$$

和

$$\varepsilon_p = \frac{m}{Md^2}\left[1-\left(\frac{d}{1+d}\right)^2\right]. \tag{9.49}$$

其中 $d=\frac{\rho}{r}$, $\rho=|r_{Rp}|$, $r=|r_R|$。

通常 $\rho \ll r$，即 d 是一个小量，(9.48)和(9.49)式又可化为

$$\varepsilon_s = \frac{Md^3}{m}(2-3d+4d^2), \tag{9.50}$$

和

$$\varepsilon_p = \frac{m}{Md^2}(1-d^2). \tag{9.51}$$

如果取 $\varepsilon_s=\varepsilon_p$，则由(9.50)和(9.51)式在忽略 d 的一次幂及其以上项时可得：

$$\rho = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\left(\frac{m}{M}\right)^{2/5} r. \tag{9.52}$$

由于 ρ 就是 r_A，$r \approx r_p$，因此如果去掉(9.52)式中的系数 $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$，它就化为(9.45)式。

利用(9.45)、(9.50)和(9.51)式可以求出太阳系各大行星(包括地球)的作用范围的半径，内作用范围和外作用范围的半径。它

表 9-4 大行星的日心距离和作用范围

行星	与太阳的平均距离		$\lvert\varepsilon\rvert=0.01$ (10^6 公里)		作用范围半径		作用范围半径与其轨道半径之比
	天文单位	10^8 公里	内作用范围半径	外作用范围半径	天文单位	10^6 公里	
水 星	0.387099	0.579	0.053	0.243	0.000747	0.112	0.00193
金 星	0.723332	1.081	0.24	2.04	0.00411	0.615	0.00569
地 球	1.000000	1.495	0.40	2.66	0.00619	0.925	0.00619
火 星	1.523691	2.278	0.27	1.27	0.00387	0.579	0.00254
木 星	5.202803	7.78	13.23	217.9	0.322	48.1	0.0619
土 星	9.538843	14.26	15.7	243	0.365	54.6	0.0382
天王星	19.181951	28.68	17.2	195	0.348	52.0	0.0181
海王星	30.057779	44.94	30.6	342	0.581	86.9	0.0193
冥王星	39.43871	58.96	1.9	4.9	0.0211	3.2	0.000536

们列于表 9-4 中.

利用作用范围可以把行星际火箭的运动大致分为三个阶段.

(1) 从地球表面发射到脱离地球作用范围.

在这个阶段主要研究行星际火箭相对于地心的运动. 这时火箭除了受到地球的引力(包括地球形状摄动)作用外，还受到地球大气的阻力和日、月引力等作用. 采用数值方法积分火箭的运动方程，可以得到它相对于地球的运动轨道接近于一条双曲线. 因为只有这样才能使火箭在脱离地球作用范围后还有剩余的速度飞向目标行星. 通常这一阶段飞行时间较短.

(2) 从离开地球作用范围之后到进入目标行星的作用范围之前. 这个阶段称为过渡阶段. 在过渡阶段主要研究行星际火箭相对于日心的运动. 这时火箭除了受到太阳的引力作用外，还受到地球、目标行星和可能飞经邻近的行星的引力等作用. 这时火箭相对于太阳的运动轨道基本上接近于一个椭圆. 但是也有些火箭的运动轨道接近于一条抛物线或者双曲线，这主要取决于火箭的初始速度. 这一阶段的飞行时间最长，因此是行星际火箭运动的主要阶段.

(3) 进入目标行星的作用范围之后.

在这个阶段主要研究行星际火箭相对于目标行星中心的运动. 这时火箭除了受到目标行星的引力(包括它的形状摄动)作用外，还受到目标行星大气(如果存在大气的话)的阻力，太阳和目标行星的卫星(如果存在卫星的话)的引力等作用. 仍然采用数值积分方法可得它相对于目标行星的运动轨道也是接近于一条双曲线.

有些行星际火箭是同时飞往几个行星的，例如表 9-3 中所列的"先驱者 11 号"(Pioneer-11)，"水手 10 号"(Mariner-10)和"旅行者 2 号"(Voyager-2)等. 这些行星际火箭的运动除了上述三个阶段外，当进入"过路"行星的作用范围时还必须考虑这些行星的引力作用，直到完全脱离它们的作用范围为止.

对于需要回收的行星际火箭，它们的返回轨道也经历了上述

几个阶段，只是过程正好相反。这时把目标行星当作出发行星，地球当作目标行星。

与月球火箭运动相类似，在利用分析方法讨论行星际火箭运动，估算它的发射速度、轨道形状和飞行时间时，可以把它处理为几个二体问题。

当行星际火箭处于第一阶段时，我们可以忽略地球大气阻力和日、月引力作用，这时火箭在地球的中心引力作用下相对于地心的运动轨道是一条双曲线。

当行星际火箭处于第二阶段时，我们可以忽略地球和其它行星的引力作用。这时火箭在太阳的引力作用下相对于太阳的运动

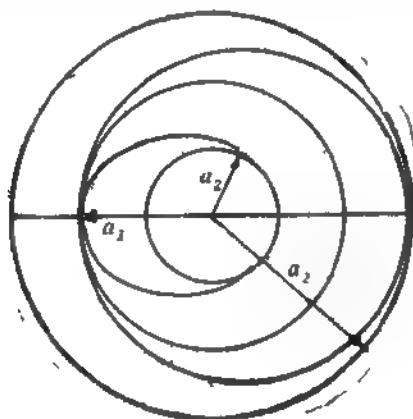


图 9-5

轨道是一个椭圆。由图 9-5 可以看出，若用 a_1 表示地球的轨道半径，用 a_2 表示目标行星的轨道半径(对于外行星 $a_2 > a_1$，对于内行星 $a_2 < a_1$)。则要使行星际火箭能够到达目标行星的椭圆轨道的偏心率至少是：

$$e = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}, \qquad (\text{对于外行星}) \tag{9.53}$$

或者

$$e=\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}.\qquad (\text{对于内行星}) \tag{9.54}$$

相应的轨道半长径为:

$$a=\frac{1}{2}(a_1+a_2). \tag{9.55}$$

由于过渡阶段的飞行时间较长，特别是对于较外的行星飞行时间很长(关于飞行时间可以参见本章 §5)，因此有时这个阶段的火箭对于太阳的运动轨道也可能是抛物线甚至于双曲线，这样可以大大缩短飞行时间。

当行星际火箭处于第三阶段时，我们可以忽略目标行星大气的阻力,太阳和目标行星卫星的引力作用,这时火箭在目标行星的中心引力作用下相对于目标行星的运动轨道也是一条双曲线。

下面估算一下行星际火箭要到达目标行星至少应当具有的发射速度。

设 v_e 是距离地心为 ρ_0 处的脱离速度,显然有:

$$v_e^2=\frac{2Gm}{\rho_0}. \tag{9.56}$$

其中 m 是地球质量。

设 Δv_e 是为了使行星际火箭在脱离开地球作用范围后还能够到达目标行星所需要增加的速度; ρ 是地球外作用范围的半径,可取 $\rho=2.66\times10^6$ 公里; v 是火箭脱离地球外作用范围后的剩余速度。利用活力公式有:

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{Gm}{\rho}=\frac{1}{2}(v_e+\Delta v_e)^2-\frac{Gm}{\rho_0}. \tag{9.57}$$

将(9.56)式代入(9.57)式后可得火箭的剩余速度是:

$$v=\left[\frac{2Gm}{\rho}+\Delta v_e(2v_e+\Delta v_e)\right]^{1/2}. \tag{9.58}$$

为了使火箭能够到达目标行星，在它离开地球外作用范围后相对于太阳的运动轨道半长径 a 应当满足(9.55)式，这时要求火箭相对于太阳的运动速度至少是:

$$v^* = \left[GM\left(\frac{2}{a_1} - \frac{1}{a}\right)\right]^{1/2}. \tag{9.59}$$

其中M是太阳质量。

为了节省能量，可以充分利用地球围绕太阳运动的速度．设$v_地$表示地球的轨道速度，有$v_地 = \sqrt{\frac{GM}{a_1}} = 29.8$公里/秒． 由图9-5可以看出，这时：

$$v^* = v_地 + v, \quad (对于外行星) \tag{9.60}$$

或者

$$v^* = v_地 - v. \quad (对于内行星) \tag{9.61}$$

将(9.55)和(9.60)或者(9.61)式代入(9.59)式后可得这时要求行星际火箭能够到达目标行星所必须具有的剩余速度至少是

$$v = \left(\sqrt{\frac{2a_2}{a_1 + a_2}} - 1\right)v_地. \quad (对于外行星) \tag{9.62}$$

或者

$$v = \left(1 - \sqrt{\frac{2a_2}{a_1 + a_2}}\right)v_地. \quad (对于内行星) \tag{9.63}$$

利用表9-4、公式(9.58)和(9.62)或者(9.63)可以算出从地球表面向太阳系各大行星发射行星际火箭所需要增加的速度Δv,

表9-5 飞向各大行星所需要的速度

大行星	剩余速度 v (公里/秒)	需要增加的速度 Δv_e(公里/秒)	初始发射速度 v_0(公里/秒)	第三宇宙速度与初始发射速度之差(公里/秒)
水 星	7.537	2.362	13.49	3.17
金 星	2.497	0.290	11.47	5.19
火 星	2.947	0.396	11.57	5.09
木 星	8.797	3.139	14.23	2.43
土 星	10.30	4.115	15.20	1.46
天王星	11.29	4.831	15.89	0.77
海王星	11.66	5.075	16.15	0.51
冥王星	11.82	5.197	16.27	0.39
恒星间空间	12.34	5.608	16.66	0

和火箭的初始发射速度 v_0。表 9-5 列出了向各大行星发射行星际火箭应当具有的剩余速度 v，在离地面高度为 460 公里处发射火箭所要增加的速度 Δv_c，和初始发射速度 v_0，以及它与第三宇宙速度(脱离太阳系所需要的速度)之差 Δv。

对于行星际火箭从发射到到达目标行星的飞行时间我们可以采用分段计算．当火箭运动处于第一和第三阶段时由于它的运动轨道是一条双曲线，因此应当采用(9.7)式来计算出这二个阶段的飞行时间 Δt_1 和 Δt_3；当火箭运动处于第二阶段时需要根据它运动的轨道类型分别采用(9.4)、(9.7)或者(9.19)式计算出过渡阶段的飞行时间 Δt_2。总的飞行时间应当是$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$．

§5 最小能量轨道

在本章 §2 和 §4 中，我们已经介绍了这样一种过渡轨道：在地月空间飞行中，以地球为近地点，月球为远地点的椭圆轨道作为过渡轨道；在行星际空间飞行中，以地球为近日点(如果向内行星发射则为远日点)目标行星为远日点(如果向内行星发射则为近日点）的椭圆轨道作为过渡轨道．火箭沿着这种过渡轨道飞行所需要的能量最少，它被称为最小能量轨道．由于这种轨道分别与围绕地球和目标天体附近运动的驻留轨道相切，因此又称为双切轨道．最小能量轨道最早是由霍曼(Hohmann)在 1925 年提出来的，故有时也叫做霍曼轨道．

利用(9.55) 和 (9.53)或者(9.54) 式可以得到行星际火箭沿着最小能量轨道飞向各大行星时，过渡轨道的半长径和偏心率．

当行星际火箭沿着最小能量轨道飞行时，从地球飞到目标行星所需要的飞行时间正好是火箭沿着这个椭圆轨道运动的轨道周期的一半．利用(9.55)式可得火箭在过渡轨道上的飞行时间是

$$t_T = \pi\left[\frac{(a_1 + a_2)^3}{8GM}\right]^{1/2}. \tag{9.64}$$

对于需要回收的行星际火箭，当火箭到达目标行星后并不是

在任何时间可以沿着最小能量轨道返回地球的，它必须选择合适的时间使得火箭返回到地球轨道时正好与地球相遇，这样才能完成火箭回收的使命．从到达目标行星到可以返回的这段时间称为等待时间，用 t_W 来表示．下面来计算至少需要等待的时间．

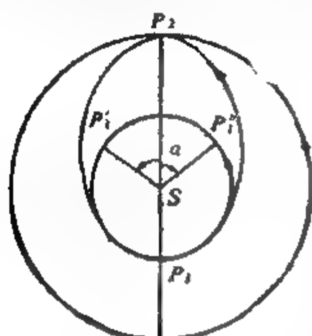


图 9-6

首先讨论向外行星发射行星际火箭的情形．

如图 9-6 所示，当火箭从地球 P_1 飞行到目标行星 P_2 位置时，假设这时地球运动到目标行星前面与它的日心张角为 $\alpha(0 < \alpha < \pi)$ 的 P_1' 位置．根据轨道的对称原理只有当地球运动到相对于目标行星后面与它的日心张角仍是 α 的 P_1'' 位置时，火箭从目标行星 P_2 返回时才能在图中 P_1 位置与地球相遇．若 n_1 和 n_2 分别表示地球和目标行星的平均运动 $(n_1 > n_2)$，则地球相对于目标行星前进的运动角速度为 $n_1 - n_2$．这样要使地球相对于目标行星从位置 P_1' 前进到 P_1'' 所需要等待的时间是：

$$t_W = \frac{2\pi - 2\alpha}{n_1 - n_2}. \tag{9.65}$$

火箭从 P_1 飞行到 P_2 所需要的时间是 t_T，它可以从 (9.64) 式求出．由图 9-6 可以看出在这段时间内地球围绕太阳转过的角度（从 P_1 到 P_1'），应当是 $2k\pi + \pi + \alpha(k = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ 故有：

$$n_1 t_T = 2k\pi + \pi + \alpha. \tag{9.66}$$

将(9.66)式代入(9.65)式后可得火箭在目标行星上需要等待的时间是：

$$t_W = \frac{2(k+1) - 2t_T}{1 - n_2/n_1}. \quad (\text{年}) \tag{9.67}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots\cdots$．它可以这样选取：使其满足不等式 $t_T - 1 < k < t_T$．这时有 $t_W > 0$，而且得到的是至少需要等待

的时间。

如果火箭从地球 P_1 飞行到目标行星 P_2 时，地球运动到的位置 P_1' 是在目标行星的后面，如图 9-7 所示．设它与目标行星的地心张角是 $\alpha(0<\alpha<\pi)$．同样利用轨道对称原理，只有当地球运动到相对于目标行星前面与它的日心张角仍是 α 的 P_1'' 位置时，火箭从目标行星 P_2 返回时，才能在 P_1'' 处与地球相遇．由图 9-7 可以得到这时要使地球相对于目标行星从位置 P_1' 移动到 P_1'' 所需要等待的时间是：

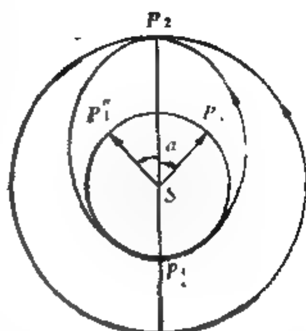


图 9-7

$$t_W=\frac{2\alpha}{n_1-n_2}. \tag{9.68}$$

火箭从 P_1 飞行到 P_2 的时间是 t_T．在这段时间内地球围绕太阳转过的角度(从 P_1 到 P_1') 应当是 $2k\pi+\pi-\alpha$，($k=0,1,2,\cdots\cdots$)故有：

$$n_1t_T=2k\pi+\pi-\alpha. \tag{9.69}$$

将(9.69) 代入 (9.68)式后可得这时火箭在目标行星上需要等待的时间是：

$$t_W=\frac{2k+1-2t_T}{1-n_2/n_1}. \quad (\text{年}) \tag{9.70}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots\cdots$．同样应当选取 k 使它满足不等式 $t_T-\frac{1}{2}<k<t_T+\frac{1}{2}$．这时有 $t_W>0$，而且得到的是至少需要等待的时间。

下面讨论向内行星发射行星际火箭的情形。

如图 9-8 所示，当火箭从地球 P_1 飞行到目标行星 P_2 位置时，这时由于地球运动角速度比较小，它只可能运动到目标行星后面与它的日心张角为 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 的 P_1' 位置．仍然根据轨道对称

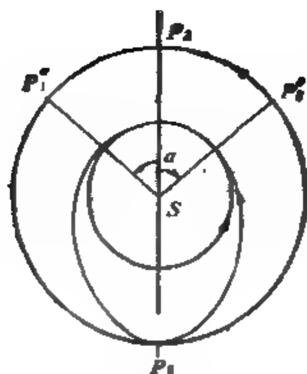


图 9-8

原理，当地球运动到目标行星前面与它的日心张角仍是α的P_1''位置时，火箭从目标行星P_2返回时才能在P_1处与地球相遇。若n_1和n_2仍分别表示地球和目标行星的平均运动（这时$n_1 < n_2$）则地球相对于目标行星后退的运动角速度为 $n_2 - n_1$。这样要使地球相对于目标行星从图9-8中的位置P_1'后退到位置P_1''所需要等待的时间是：

$$t_W = \frac{2\pi - 2\alpha}{n_2 - n_1}. \tag{9.71}$$

同样火箭从P_1飞行到P_2时间是t_T。在这段时间内地球围绕太阳转过的角度（从P_1到P_1'）应当是$\pi - \alpha$（由于地球运动角速度比较小，它转过的角度应小于π）。故有：

$$n_1 t_T = \pi - \alpha. \tag{9.72}$$

将(9.72)式代入(9.71)式后，可得向内行星发射行星际火箭时，它在内行星上需要等待的时间是：

$$t_W = \frac{2t_T}{n_2/n_1 - 1}. \tag{9.73}$$

行星际火箭沿着最小能量轨道从地球飞行到目标行星，然后再沿着最小能量轨道返回到地球上的总共需要的时间应当是：

$$T = 2t_T + t_W. \tag{9.74}$$

利用(9.64)、(9.67)或者(9.70)、(9.73)和(9.74)式可以计算出

向太阳系各大行星飞行所需要的各种时间，它们列于表9-6中．由表 9-6 可以看出：除了金星和火星外，在向其它大行星，特别是越往外的大行星发射行星际火箭时，往返所需要的时间 T 中占主要部分的是在过渡轨道上飞行的时间 t_T．因此要节省往返飞行时间的关键是缩短在过渡轨道上的飞行时间．

表 9-6　最小能量过渡轨道和抛物线过渡轨道

行　星	轨道半长径 a (天文单位)	轨道偏心率 e	过渡轨道飞行时间 t_T (年)	至少等待的时间 T_W (年)	总的飞行时间 $T=2t_T+T_W$ (年)	抛物线过渡轨道飞行时间 t_P (年)
水　星	0.6935	0.4419	0.289	0.183	0.761	
金　星	0.8617	0.1606	0.400	1.278	2.078	
火　星	1.2618	0.2075	0.709	1.242	2.660	0.1913
木　星	3.1034	0.6776	2.731	0.588	6.050	1.108
土　星	5.2694	0.8102	6.048	0.937	13.03	2.530
天王星	10.091	0.9009	16.04	0.932	33.01	6.776
海王星	15.529	0.9356	30.62	0.766	62.01	12.965
冥王星	20.219	0.9505	45.47	0.061	91.00	19.276

另外，由表 9-6 还可以看到：在向土星、天王星尤其是向海王星和冥王星用最小能量轨道飞行时，往返所需要的时间太长了，这显然是不现实的．这时往往采用另外一些过渡轨道，例如用抛物线轨道作为过渡轨道．由表 9-5 可以看出只要适当增加一些初始发射速度，特别是对于较外的行星仅仅只要增加一点点速度（所要增加的速度见表 9-5 中最后一列），使得行星际火箭沿着抛物线轨道飞行，就能大大缩短飞行时间．

从(9.19) 式可以得到行星际火箭用抛物线轨道作为过渡轨道时从地球到目标行星所需要的飞行时间是：

$$t_p = \frac{1}{3\sqrt{2}\,\pi}\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)^{1/2}\left(\frac{a_2}{a_1}+2\right). \quad \text{(年)} \qquad (9.75)$$

其中 a_1 和 a_2 分别为地球和目标行星与太阳的平均距离，由于抛物线轨道通常只用于向外行星飞行，因此这里有 $\frac{a_2}{a_1}>1$．

利用(9.75) 式可以计算出向太阳系各个外行星用抛物线轨道

作为过渡轨道所需要的飞行时间，它们也列于表 9-6中. 由表 9-6 可以看出在向土星、天王星，特别是向海王星和冥王星飞行时，采用抛物线轨道或者双曲线轨道作为过渡轨道还是比较合适的. 事实上，目前向外行星特别是向较远的行星发射行星际火箭所采用的过渡轨道绝大多数是这种类型的轨道. 例如从表 9-3 可以看出"旅行者 2 号"就是差不多沿着一条抛物线轨道飞向各大行星和恒星际空间的.

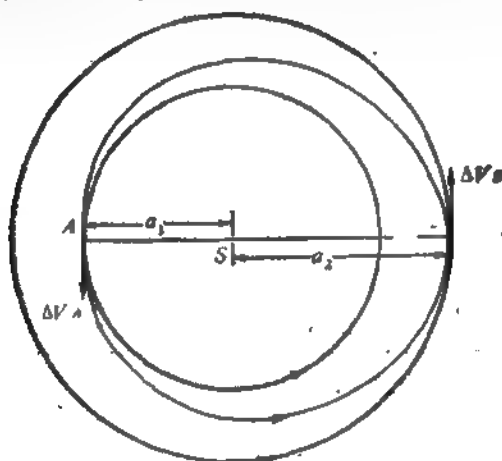


图 9-9

在发射的行星际探测器中，有些是人造行星卫星. 例如表9-3中所列的"火星 2 号"和"金星 9 号"等. 为了充分利用地球运动速度，如图 9-9 所示，在A处给行星际火箭加速使它从以 a_1 为半径的圆轨道变为向目标行星飞行的最小能量轨道，当火箭沿着这个过渡轨道飞行到B处时再给它加速使它从最小能量轨道变为以 a_2 为半径的圆轨道. 这样行星际火箭才有可能围绕着目标行星运动成为它的卫星. 设 Δv_A 和 Δv_B 分别表示在A和B处需要增加的速度，因此要想沿着地球轨道运动过渡到沿着目标行星轨道运动而成为目标行星卫星所需要增加的速度（它相当于要增加的能量)是:

$$E = \Delta v_A + \Delta v_B. \tag{9.76}$$

利用二体问题中的活力公式可得：

$$\Delta v_A = \left[GM\left(\frac{2}{a_1} - \frac{1}{a}\right)\right]^{1/2} - \left(\frac{GM}{a_1}\right)^{1/2}. \tag{9.77}$$

和

$$\Delta v_B = \left(\frac{GM}{a_2}\right)^{1/2} - \left[GM\left(\frac{2}{a_2} - \frac{1}{a}\right)\right]^{1/2}. \tag{9.78}$$

将(9.77)和(9.78)式代入(9.76)式并且利用(9.55)式可得：

$$E = \left(\frac{GM}{a_1}\right)^{1/2}\left\{\left[\left(\frac{2a_2/a_1}{1 + a_2/a_1}\right)^{1/2} - 1\right] + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/2}\left[1 - \left(\frac{2}{1 + a_2/a_1}\right)^{1/2}\right]\right\}. \tag{9.79}$$

如果采用理论单位制，并且在地球上发射的话则(9.79)式化为：

$$E = \left(\frac{2a_2}{1 + a_2}\right)^{1/2} - 1 + \left(\frac{1}{a_2}\right)^{1/2}\left[\left(1 - \frac{2}{1 + a_2}\right)\right]^{1/2}. \tag{9.80}$$

由(9.80)式可以看出火箭所需要增加的速度或者能量直接与行星的轨道半径 a_2 有关。但是它们之间并不是呈单调增函数关系，这说明向越外的大行星发射火箭所消耗的能量不一定就越大。显然当 $a_2 \to \infty$ 时，由(9.80)式可得这时的 $E = \sqrt{2} - 1 = 0.4142$，它相当于在地球轨道处从圆轨道变为能够脱离太阳系的抛物线轨道所需要增加的速度。

利用 $\frac{dE}{da_2} = 0$，可以求出它的极值。根据这个条件，由(9.80)式不难推出：

$$a_2^3 - 15a_2^2 - 9a_2 - 1 = 0. \tag{9.81}$$

(9.81)式是 a_2 的三次方程，它的系数只变号一次。根据笛卡尔(Descartes)符号律，方程(9.81)只有一个正根。利用数值方法可以算出这个正根是 $a_2 = 15.582$，由(9.80)式可以得到：当 $a_2 =$

1时，$E=0$；$a_2>1$ 时 $E>0$。因此 $a_2=15.582$ 是E的极大值，这时的 $E=0.5363$。伊里克(Ehricke)在1962年就得到了这个结果。这个结果说明当 $a_2>15.582$ 时，火箭所需要的燃料反而会减少。因此利用这种轨道作为过渡轨道的话，向海王星($a_2=30.058$)和冥王星($a_2=39.439$)发射行星际火箭比向天王星($a_2=19.182$)发射行星际火箭更为节省燃料。

另外由(9.80)式还可以得到当 $a_2=3.305$ 时，$E=\sqrt{2}-1$。将E与a_2的关系可以绘成图9-10。

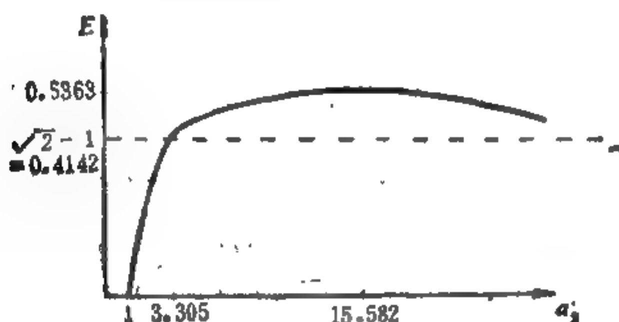


图 9-10

由图9-10可以看出，当 $a_2\geqslant 3.305$ 时 $E\geqslant\sqrt{2}-1$，它说明对于向木星($a_2=5.203$)和更外的行星发射行星际火箭时，如果采用双切轨道作为过渡轨道的话比发射脱离太阳系的火箭所需要的燃料更多些，因此这种"最小能量轨道"实际上并不是最经济的。

对于轨道半径之比是 $a_2/a_1\gg 3.305$ 的二个行星之间的轨道过渡，伊里克等建议可以采用双椭圆过渡轨道来代替最小能量轨道，这样更节省燃料。如图9-11所示，在A处给火箭增加速度$\Delta v_A'$，使它沿着一个远日距离比 a_2 还要大的椭圆运动，当火箭运动到远日点C处再增加速度 $\Delta v_C'$，使它沿着一个更大的椭圆运动到近日点B处时再减速 $\Delta v_B'$，使得火箭沿着半径为 a_2 的圆轨道运动，完成轨道过渡。只要双椭圆轨道的远日距离与 a_1 之比大于或者等于15.582的话，采用这样的过渡轨道会比最小能量轨道更

节省燃料．显然这种过渡轨道的最大缺点是飞行时间将会更长。

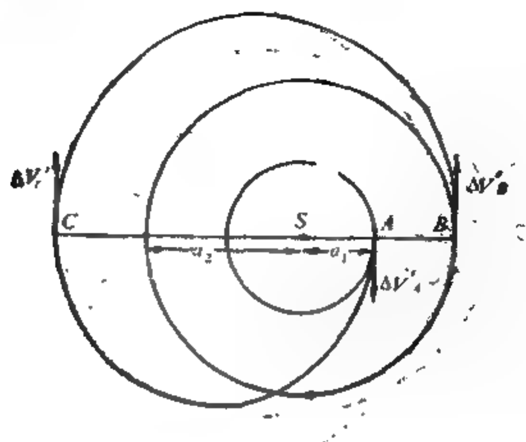


图 9-11

§6 驻留轨道

在地月空间和行星际空间飞行中，常常采用围绕着地球和月球或者目标行星附近的圆轨道作为中间站或者停靠轨道，这种轨道称为驻留轨道．对于一些需要回收和返回的火箭，如果将一些在返回中要用的燃料等贮存在驻留轨道上以备返回时取用，这样可以大大地节省宇宙飞行中所需要的燃料．美国阿波罗登月飞行中就采用了这种方案。

在图 9-12 中，设 P_1 和 P_2 分别是地球和目标行星、围绕着 P_1 和 P_2 附近的圆轨道是驻留轨道．行星际火箭从 P_1 飞向 P_2 的过渡轨道是采用最小能量轨道．行星际火箭从地面上起飞到目标行星着陆然后再返回到地面上的整个飞行过程可以分为下列几步来实现：

(1). 由 P_1 发射到图中 A 处，在这里行星际火箭进入地球附近的驻留轨道．

(2). 火箭沿着驻留轨道滑行到图中 B 处。

(3). 在 B 处，行星际火箭从圆轨道转变为椭圆轨道，火箭沿着

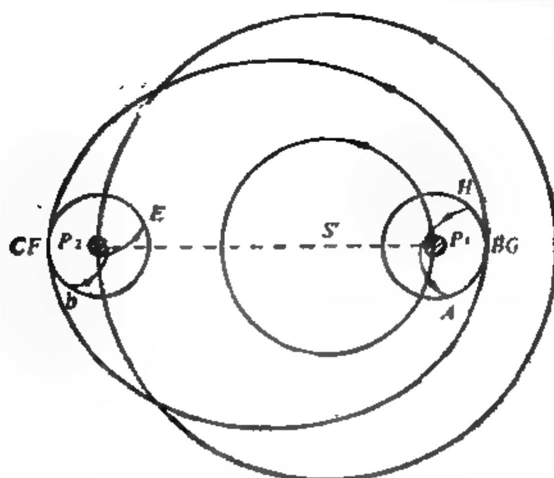


图 9-12

这个过渡轨道飞行到 P_2 附近并且在图中 C 处再转变为圆轨道，这个圆轨道是目标行星附近的驻留轨道。

(4). 火箭沿着驻留轨道滑行到图中 b 处。

(5) 火箭脱离驻留轨道并且在目标行星 P_2 处着陆。

当行星际火箭返回时，过程正好相反。火箭从目标行星 P_2 起飞到 E 处进入驻留轨道；火箭沿着驻留轨道滑行到 F 处，再沿着过渡轨道飞回 G 处；火箭再沿着驻留轨道滑行到 H 处，然后降落到地面 P_1。行星际火箭在这样往返飞行过程中各种轨道之间转换所需要增加的速度列在表 9-7 中。

由于行星际火箭从目标行星 P_2 返回地球 P_1 的飞行过程正好与从 P_1 飞向 P_2 的飞行过程相反，因此我们可以认为在表 9-7 中有：

$$\left.\begin{array}{ll} v_A = v_H, & v_D = v_E \\ v_C = v_F, & v_B = v_G \end{array}\right\}. \tag{9.82}$$

和

$$v_1 \approx v_1', \qquad v_2 \approx v_2'. \tag{9.83}$$

表 9-7 行星际空间飞行中各阶段所要增加的速度和火箭的剩余质量

飞行阶段	需要增加速度	说明	火箭剩余质量
$P_1\to A$	v_1+v_A	v_1 使火箭到达 A; v_A 使它进入围绕 P_1 的圆轨道.	m_A
$A\to B$	0	滑行;留下质量为 m_{AR} 的燃料等.	m_A-m_{AR}
$B\to C$	v_B+v_C	v_B 使火箭进入日心过渡轨道; v_C 再使它变为围绕 P_2 的圆轨道.	m_C
$C\to D$	0	滑行;留下质量为 m_{CR} 的燃料等.	m_C-m_{CR}
$D\to P_2$	v_D+v_2	v_D 使火箭脱离圆轨道; v_2 使它着陆.	m_2
$P_2\to E$	$v_2'+v_E$	v_2' 使火箭到达 E; v_E 使它进入围绕 P_2 的圆轨道.	m_E
$E\to F$	0	滑行;取回 m_{CR}	m_E+m_{CR}
$F\to G$	v_F+v_G	v_F 使火箭进入日心过渡轨道, v_G 再使它变为围绕 P_1 的圆轨道.	m_G
$G\to H$	0	滑行;取回 m_{AR}	m_G+m_{AR}
$H\to P_1$	v_H+v_1'	v_H 使火箭脱离圆轨道; v_1' 使它着陆.	m_1

为了方便起见，我们先考虑采用单级火箭. 利用变质量物体运动过程不难得到火箭在无外力作用（即齐奥尔柯夫斯基第一问题）下消耗的燃料与增加的速度之间的关系是:

$$\frac{M_0}{m}=\exp v. \tag{9.84}$$

其中 M_0 和 m 分别是火箭在初始和终了时刻的质量， v 是以火箭的排气速度为单位的火箭相应增加的速度.

如果(9.84)式中的 m 表示行星际火箭沿着上述轨道从地球飞到目标行星后再返回到地球时的质量,则利用(9.82)和(9.83)式可得(9.84)式中的速度 v 应当是:

$$v=2(v_1+v_A+v_B+v_C+v_D+v_2). \tag{9.85}$$

若令

$$\left.\begin{aligned}U_1&=v_1+v_A\\U_2&=v_B+v_C\\U_3&=v_D+v_2\end{aligned}\right\}. \tag{9.86}$$

则(9.84)式化为

$$\frac{M_0}{m} = \exp(2U_1 + 2U_2 + 2U_3). \qquad (9.87)$$

由(9.87)式所得到的 M_0 就是沿着这种轨道返回到地球上质量还剩 m 时火箭在初始时刻应当具有的质量。由于 $m \ll M_0$,因此相应所需要的燃料是 $M_0 - m \approx M_0$。

为了节省燃料，我们可以采取这样的飞行方案：当行星际火箭从 A 滑行到 B 的过程中，在围绕着 P_1 的驻留轨道上留下作为火箭从 H 返回到地球 P_1 所需要的燃料 m_{AR}；当行星际火箭从 C 滑行到 D 的过程中，在围绕着 P_2 的驻留轨道上留下作为火箭从 F 返回到 G 所需要的燃料 m_{CR}。在这种方案中，各个飞行阶段结束时火箭剩余的质量列在表 9-7 的最后一列。假设这时行星际火箭的初始质量是 m_0，则由(9.84)式有：

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_0}{m_A} &= \exp(v_1 + v_A) = \exp U_1 \\ \frac{m_A - m_{AR}}{m_C} &= \exp(v_B + v_C) = \exp U_2 \\ \frac{m_C - m_{CR}}{m_2} &= \exp(v_D + v_2) = \exp U_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.88)$$

和

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_2}{m_E} &= \exp(v_2' + v_E) = \exp U_3 \\ \frac{m_E + m_{CR}}{m_G} &= \exp(v_F + v_G) = \exp U_2 \\ \frac{m_G + m_{AR}}{m_1} &= \exp(v_H + v_1') = \exp U_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.89)$$

或者是：

$$\left.\begin{aligned} m_G &= m_1 \exp U_1 - m_{AR} \\ m_E &= m_G \exp U_2 - m_{CR} \\ m_2 &= m_E \exp U_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.90)$$

和

$$
\left.\begin{aligned}
m_C &= m_2 \exp U_3 + m_{CR} \\
m_A &= m_C \exp U_2 + m_{AR} \\
m_0 &= m_A \exp U_1
\end{aligned}\right\}. \tag{9.91}
$$

设行星际火箭外壳和密封舱的质量为 m. 假定火箭在返回过程中，从围绕 P_2 和 P_1 的驻留轨道上取回质量为 m_{AR} 和 m_{CR} 的燃料时，火箭上原有的燃料已经用尽，则有

$$
m_E \approx m_G \approx m_1 \approx m. \tag{9.92}
$$

若以 m 为质量单位，利用(9.90)的前二式和(9.92)式可得：

$$
\left.\begin{aligned}
m_{AR} &= \exp U_1 - 1 \\
m_{CR} &= \exp U_3 - 1
\end{aligned}\right\}. \tag{9.93}
$$

将(9.90)的第三式，(9.92)和(9.93)式代入(9.91)式后，可得采用这种飞行方案时火箭的初始质量是：

$$
\begin{aligned}
m_0 &= \{[\exp(2U_3) + m_{CR}]\exp U_2 + m_{AR}\}\exp U_1 \\
&= \{[\exp(2U_3) + \exp U_3 - 1]\exp U_2 + \exp U_1 \\
&\quad - 1\}\exp U_1.
\end{aligned} \tag{9.94}
$$

但是，从(9.87)式得到：

$$
M_0 = \exp(2U_1 + 2U_2 + 2U_3). \tag{9.95}
$$

由(9.94) 和 (9.95)式可得这二种飞行方案火箭的初始质量之比为：

$$
\frac{M_0}{m_0} = \frac{\exp(U_1 + 2U_2 + 2U_3)}{[\exp(2U_3) + \exp U_3 - 1]\exp U_2 + \exp U_1 - 1}. \tag{9.96}
$$

为了说明能够节省多少燃料，下面举一个例子. 在地球—火星—地球的飞行中，假设行星际火箭的排气速度是 2.5 公里/秒，采用的驻留轨道是离开地球和火星表面高度为 460 公里的圆轨道. 首先利用(9.86)式求出 U_1、U_2 和 U_3，然后再利用(9.94)、(9.95)和(9.96)式计算 m_0、M_0 和 M_0/m_0.

$U_1 = v_1 + v_A$，它表示将行星际火箭从地球表面送到离开地面为 460 公里高度并且在围绕地球的驻留轨道上作圆运动所需要的速度. 如果取地球赤道半径为 6378 公里，则 U_1 就是距离地心

为 6378 + 460 公里处的围绕地球作圆运动的环绕速度．显然有

$$U_1 = 7.635 \text{ 公里/秒。} \tag{9.97}$$

$U_3 = v_D + v_2 = v_2' + v_E$，它表示行星际火箭从火星表面送到离开它为 460 公里高度处并且在围绕火星的驻留轨道上作圆运动所需要的速度．如果取火星的赤道半径为 3395 公里，则 U_3 就是距离火星质心为 3395 + 460 公里处围绕火星作圆运动的环绕速度，因此

$$U_3 = 3.334 \text{ 公里/秒。} \tag{9.98}$$

$U_2 = v_3 + v_C = v_B + v_F$，其中 v_B 是行星际火箭从围绕地球的驻留轨道变为向火星飞行的日心过渡轨道（相对于地球是双曲线轨道)所需要增加的速度， v_F 是火箭从围绕火星的驻留轨道变为向地球返回的日心过渡轨道(相对于火星也是双曲线轨道)所需要增加的速度。

利用表 9-5，不难算出

$$v_B = [(\sqrt{2} - 1) \times 7.635 + 0.396] \text{公里/秒} = 3.559 \text{公里/秒}. \tag{9.99}$$

对于 v_F 可以采用与计算 v_B 相类似的方法．设 Δv_c 是行星际火箭在向地球返回时，脱离火星外作用范围后还能够沿着最小能量轨道到达地球所需要增加的速度，由 (9.58) 式可得火箭在脱离火星外作用范围后的剩余速度是：

$$v = \left[\frac{2Gm'}{\rho'} + \Delta v_c(2v_c + \Delta v_c)\right]^{1/2}. \tag{9.100}$$

其中 m' 和 ρ' 是火星的质量和外作用范围半径，由表 9-4 可取 $\rho' = 1.27 \times 10^6$ 公里； v_e 是离火星表面 460 公里高度处脱离火星的逃逸速度，显然有 $v_e = \sqrt{2}\,U_3$．

行星际火箭从火星返回地球可以认为是从地球飞向火星的相反过程．由于地球相对于火星来说是它的内行星，因此应当利用 (9.63)式来求剩余速度，但是要将其中的 a_1 和 a_2 互换一下。这时可得火箭能够返回地球所必须具有的剩余速度是：

$$v = \left(1 - \sqrt{\frac{2a_1}{a_1 + a_2}}\right) u_火 = \sqrt{\frac{GM}{a_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + a_2/a_1}}\right). \quad (9.101)$$

其中M为太阳质量，a_1和a_2分别是地球和火星的轨道半径.

将火星和地球的轨道数据代入(9.101)式后，可得剩余速度

$$v = 2.657 \text{ 公里/秒}. \quad (9.102)$$

类似(9.99)式，可得:

$$v_F = (\sqrt{2} - 1)U_3 + \Delta v_c.$$

或者是

$$v_F + U_3 = v_c + \Delta v_c. \quad (9.103)$$

由(9.100)和(9.103)式不难得到:

$$(v_F + U_3)^2 = v^2 + v_c^2 - 2Gm'/\rho'.$$

或者是

$$v_F = \left(v^2 + 2U_3^2 - \frac{2Gm'}{\rho'}\right)^{1/2} - U_3. \quad (9.104)$$

将(9.98)和(9.102)式以及m'，ρ'的数值代入(9.104)式后，可得:

$$v_F = 2.072 \text{ 公里/秒}. \quad (9.105)$$

由(9.99)和(9.105)式可得:

$$U_2 = 5.631 \text{ 公里/秒}. \quad (9.106)$$

如果以火箭的排气速度 2.5 公里/秒为速度单位，则由(9.97)、(9.98)和(9.106)式算出

$$U_1 = 3.054, \ U_2 = 2.252, \ U_3 = 1.334. \quad (9.107)$$

将(9.107)式代入(9.94)、(9.95)和(9.96)式后可得:

$$m_0 = 5061, \ M_0 = 588187, \ M_0/m_0 = 116.2 \quad (9.108)$$

如果将火箭的排气速度增加一倍即为 5.0 公里/秒的话，这时$U_1 = 1.527$，$U_2 = 1.126$，$U_3 = 0.667$，则相应有

$$m_0 = 100.1, \ M_0 = 766.6, \ M_0/m_0 = 7.658. \quad (9.109)$$

从(9.108)和(9.109)式可以看到：如果将返回时要用的燃料等分别贮存在围绕地球和目标行星的驻留轨道上，则能够大大节省燃料，特别是对于火箭的排气速度比较低的情况. 但是，火箭的

排气速度越大，这种方案能够节省的燃料也就越少。

在现代宇宙飞行中，为了节省燃料通常利用多级火箭。对于多级火箭采用这种方案也能够大大节省燃料，因为同样可以把暂时不需要的燃料等贮存在驻留轨道上。这种飞行方案固然可以节省燃料，但是具体实现起来在技术上也有一定的困难。当行星际火箭在返回途中要从驻留轨道上取回燃料等时，必须要采用会合技术。为了要实现宇宙飞船的这种对接技术必须要合理设计和精确计算它的轨道。1969年1月16日苏联发射的联盟4号(Союз-4)和联盟5号(Союз-5)首先实现空间对接技术。飞船在对接以后，二名宇航员从联盟5号移乘到联盟4号舱内。后来在登月飞行中，美国发射的阿波罗飞船以及美苏合作进行的阿波罗-联盟联合飞行中都实现了这种空间对接技术。

参 考 文 献

第一章

1. Y. Kozai, *SAO Spec. Rep*., 295(1969).
2. E. M. Gaposchkin, J. Latimer, and G. Veis, *SAO Spec. Rep*., 353 (1973)
3. H. Last and L. Blitzer, *Celest. Mech*., 3(1983), 225—228.

第二章

1. 易照华等,《天体力学引论》,科学出版社,1978。
2. D. Brouwer and G. M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*, New York and London, 1961, 中译本《天体力学方法》, 刘林、丁华译,科学出版社,1986。
3. T. M. Burkardt, *and* J. M. A. Danby, *Celest. Mech*.,31(1983), 317.
4. B. A. Conway, *Celest. Mech*. 39(1987), 199

第三章

1. P. Herget, *The Computation of Orbits*, Cincinati University Press, 1948.
2. P. R. Escobal, *Methods of Orbit Determination*, New York, 1965.
3. Г. М. Баженов, Бюлл. *ИТА*, 11(1965), 116—122.
4. W. T. Eckert and D. Brouwer, *Astron*. J. 46(1938), 125—132.

第四章

1. V. Szebehely, *Theory of Orbits*, New York, 1967.
2. 赵进义,《天体力学》,上海科学技术出版社,1983。
3. Pollard, Harry. *Celestial Mechanics, Mathematical Association of America*, 1976.
4. 郑学塘,天体物理学报, 3(1982), 215—223.
5. 郑学塘,倪彩霞,科学通报,24(1984),1511—1514.
6. Ni Caixia and Zheng Xuetang, *The Few Body Problem*, p49—53, Dordrecht/Boston/London, 1988.

第五章

1. W. M. Smart, *Celestial Mechanics*, London. New York. Toronto. 1953

2. Г. Н. Дубошин, *Небесная Механика*, физматгиз. 1963.

3. R H Battin, *Astronautical Guidance*, New York, San Fracisco, Toronto, London, 1964.

4. 郑学塘，童彝，北京师范大学学报(自然科学版)，4(1981)，63—70.

第六章

1. Г. А. Чеботарев, *Аналитические и Численные Методы Небесной Механики*, Наука, 1965.

2. E L Stiefel and G. Scheifele, *Linear and Regular Celestial Mechanics* Springer, Verlag, 1971.

3. P H. Cowell, Crommelin, A C. D., *Appendix to Greenwich Observations* 1909, Neill, Bellevue, England, 1910.

4. C. W. 吉尔《常微分方程初值问题的数值解》科学出版社，1978.

第七章

1. 刘林等，《人造地球卫星运动理论》，科学出版社，1974.

2. 郑学塘，《人造地球卫星运动和预报》，科学出版社，1984.

3. B Morando, *Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre*, Paris, 1974.

4. Y. Kozai, Astron. J., 64(1959), 367—372.

5. 郑学塘，北京师范大学学报(自然科学版)，2(1980)，73—82.

6. D G. King-Hele, *Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere*, London, Butterworths, 1964.

7. P Musen, J. Geophs. Res. 65(1960), 1391—1396.

8. P E. Koskela, *J. Astronaut. Sci.*, 9(1962), 71—82.

9. Y Kozai, *SAO Spec. Rep.*, 349(1973).

第八章

1. A Wintner, *The Analytical Foundation of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, 1952.

2. C. J. Cohen and E. C. Hubbard, *Astron. J.*, 67(1962), 10—15.

3. D. Brouwer, *Astron. J.*, 64(1959), 378—397.

4. G Hori, *Publ. Astron. Soc. Japan*, 18(1966), 287—296.

5. A. Deprit and A. Rom, *Celest. Mech.*, 2(1970), 166—206.

6. T. E. Sterne, *Astron. J.*, 63(1958), 28—40.

7. B. Garfikel, *Astron. J.*, 63(1958), 88—96.

8. K. Aksnes, *Astron. J.*, 75(1970), 1066—1076.

9. J. P. Vinti, *J. Research NBS*, 65B(1961), 169—201.

10. Е. П. Аксенов, *Астрон. ж.*, 45(1968), 858—864.

11. Л. П. Насонова, *Астрон. ж.*, 50(1973), 849—861.

第九章

1. A. E. Roy, *Orbital Motion, Adam Hilger Ltd.*, Bristol, 1978.

2. Г. Н. Дубошин (ред.), *Справочное Руководство по Небесной Механике и Астродинамике*, Наука, 1976.

3. М. Б. Балк, *Элементы Динамики Космического Полета*, Наука, 1965.

4. J. Jensen etal, *Design Guide to Orbital Flight*, New York, 1962

5. W. Hohmann, *Die Erreichbarkeit der Himmels-körper*, *R. Oldenbourg*, Munich, 1925.

6. 郑学塘,郁丽忠,北京师范大学学报(自然科学版),4(1988).